

SL 62/029

VOL. I

STATICA STABILITATEA SI DINAMICA CONSTRUCTIILOR

DACIA

Alexandru
CĂTĂRIG

Valeriu
BĂNUT

Lucia
MIHĂILESCU

✓
Prof. dr. ing. ALEXANDRU CĂTĂRIG
Conf. dr. ing. VALERIU BĂNUȚ
Șef lucrări ing. LUCIA MIHĂILESCU

STATICA, STABILITATEA ȘI DINAMICA CONSTRUCȚIILOR

— CALCULUL PRACTIC —

Vol. 1



CUPRINS

<i>PREFAȚA</i>	7
CALCULUL DE ORDINUL I AL STRUCTURILOR	
<i>GENERALITĂȚI</i>	10
<i>STRUCTURI STATIC DETERMINATE</i>	16
<i>Capitolul I</i>	16
Calculul reacțiunilor	16
<i>Capitolul II</i>	25
Grinda dreaptă și sisteme de grinzi drepte	25
<i>Capitolul III</i>	52
Cadre static determinate	52
<i>Capitolul IV</i>	71
Structuri articulate	71
A. Structuri articulate plane	71
B. Structuri articulate spațiale	85
<i>Capitolul V</i>	90
Arce static determinate	90
<i>Capitolul VI</i>	102
Utilizarea principiului lucrului mecanic virtual la calculul eforturilor în structurile static determinate	102
<i>Capitolul VII</i>	115
Linii de influență la structuri static determinate	115
A. Grinda dreaptă și sisteme de grinzi drepte	118
B. Grinzi cu zăbrele plane	124
C. Arce static determinate	128
D. Moment încovoietor maxim și moment încovoietor maximum maximum	131
<i>Capitolul VIII</i>	140
Deformarea structurilor elastice	140

<i>Capitolul IX</i>	167
Metode energetice în calculul structurilor	167
<i>STRUCTURI STATICE NEDETERMINATE</i>	193
<i>METODA FORTELOR</i>	194
<i>Capitolul X</i>	194
Principiile metodei forțelor	194
A. Cadre static nedeterminate	194
B. Calculul cadrelor static nedeterminate utilizând procedee pentru simpli- ficarea ecuațiilor de condiție	218
<i>Capitolul XI</i>	236
Aplicații sistematizate ale metodei forțelor	236
A. Grinzi continue	236
B. Grinzi cu zăbrele static nedeterminate	256
C. Arce static nedeterminate	264
<i>METODA DEPLASĂRILOR</i>	292
<i>Capitolul XII</i>	292
Calculul structurilor prin rezolvarea directă a sistemului de ecuații	292
<i>ANEXA</i>	320
<i>BIBLIOGRAFIE</i>	322



PREFAȚĂ

Realizarea unei construcții necesită parcurgerea mai multor etape dintre care un loc important îl ocupă proiectarea structurii de rezistență.

Structura de rezistență trebuie să fie sigură, astfel încât să se creeze condițiile exploatării normale a construcției pe tot parcursul „vieții” sale. De asemenea, este necesar ca structura proiectată să reprezinte o soluție economică în condițiile tehnice, economice și sociale existente în momentul realizării construcției.

Pentru a putea satisface aceste cerințe, proiectantul structurii trebuie să dispună de o bună pregătire tehnică și în același timp de suficiente informații din domeniile economic și social.

Lucrarea de față își propune să vină în sprijinul celor care doresc să-și formeze sau să-și perfecționeze pregătirea în calculul structurilor de rezistență, din punctul de vedere al determinării stărilor de eforturi și deformații produse de diferitele încărcări ce acționează asupra structurilor formate din bare.

Deoarece lucrarea este axată pe calculul practic al elementelor și structurilor de rezistență, aspectele teoretice sînt expuse succint la începutul fiecărui capitol, cu scopul de a le reaminti și de a familiariza cititorul cu notațiile utilizate. Se presupune că aspectele teoretice au fost studiate anterior din literatura de specialitate.

Calculul practic al elementelor și structurilor a fost tratat atît în forma specifică unei rezolvări manuale, cît și în forma matriceală necesară în analiza automată. S-a acordat o mai mare pondere primei forme de calcul pentru ca cititorul să poată înțelege și să stăpînească modul de comportare a structurii la acțiunea încărcărilor la care este supusă.

Numai dacă se dispune de o bună pregătire teoretică și de experiență în calculul practic, calculatorul de mare capacitate poate fi considerat un instrument de calcul eficient. În caz contrar, rezultatele obținute la calculator nu pot fi interpretate corect, după cum utilizarea lor, fără o atență și competență înțelegere, poate conduce la erori cu implicații nedorite.

Lucrarea cuprinde 19 capitole și apare în două volume, primul avînd 12 capitole, iar al doilea 7. Ea este alcătuită din trei părți: calculul de ordinul I, calculul neliniar și formularea matricială a calculului structurilor.

Calculul de ordinul I al structurilor cuprinde 15 capitole dintre care primele 14 tratează calculul static, iar capitolul XV tratează calculul dinamic. Calculul static se referă la structuri static determinate (capitolele I—VIII), metode energetice (capitolul IX) și structuri static nedeterminate (capitolele X—XIV).

Calculul neliniar al structurilor cuprinde capitolele XVI—XVIII, cu următorul conținut: calculul de ordinul II, calculul de stabilitate și calculul în domeniul elasto-plastic.

Formularea matricială a calculului structurilor este formată din capitolul XIX și tratează: calculul de ordinul I, calculul de ordinul II, calculul de stabilitate și calculul dinamic (vibrații libere neamortizate), utilizînd metoda deplasărilor.

Lucrarea are și un număr de 7 anexe, dintre care anexa 1 este cuprinsă în volumul 1, iar celelalte în volumul 2.

Ne exprimăm speranța că lucrarea va fi de un real folos tuturor celor care o vor utiliza, fie în practica curentă de proiectare, fie în procesul de învățămînt.

Dorim ca pe această cale să aducem calde mulțumiri prof. dr. ing. Vasile Ilie și prof. dr. ing. Ioan Munteanu, pentru observațiile și sugestiile formulate cu ocazia controlului științific.

AUTORII

CALCULUL DE ORDINUL I AL STRUCTURILOR

GENERALITĂȚI

Studiul comportării structurilor de rezistență ale construcțiilor necesită schematizarea fenomenelor reale, datorită complexității acestora, în vederea formulării matematice a calculului. De aceea structura sau elementele de rezistență, legăturile și reazemele, încărcările, materialele, pentru simplificare, se reprezintă prin *scheme de calcul*. Acestea sînt modele matematice cu ajutorul cărora se aproximează realitatea fizică. Schematizarea fenomenelor reale permite înlăturarea deosebirilor neesențiale și ca o consecință, generalizarea categoriilor de cazuri particulare.

Realizarea unei bune schematizări trebuie să constituie o preocupare permanentă a inginerului statician. Dar, acceptarea unui anumit model matematic aproximant este determinată de posibilitățile de tratare fără dificultate a acestuia folosind tehnica de calcul de care se dispune în acel moment. Rezultă că prin generalizarea utilizării calculatoarelor electronice devine posibilă perfecționarea modelelor matematice, în consecință se realizează un studiu mai apropiat de realitate al comportării construcțiilor și ca urmare o proiectare mai rațională.

Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor se ocupă cu studiul structurilor alcătuite din bare. Pentru reprezentare în cadrul schemelor de calcul barele se consideră reduse la axele lor (drepte sau curbe). În general construcțiile au configurații spațiale și o schematizare riguroasă ar conduce la modele spațiale. În majoritatea cazurilor însă este posibilă neglijarea efectului unor legături de importanță secundară, ajungîndu-se astfel la descompunerea ansamblului în structuri plane. Acesta este un avantaj pentru calcul deoarece soluționarea structurii spațiale mărește considerabil gradul de complexitate al rezolvării. Trebuie subliniat faptul că sînt situații în care o descompunere în sisteme plane nu este posibilă și atunci analiza pe un model spațial este absolut necesară.

Pentru alcătuirea unei structuri, elementele acesteia (barele) trebuie legate între ele și față de teren. Legarea între ele a barelor se face prin *noduri*, iar față de teren prin *reazeme*.

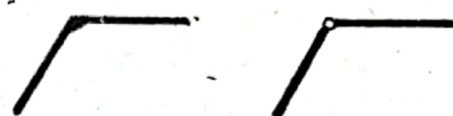


Fig. 1

Legarea între ele a barelor se poate realiza în mai multe feluri și ca atare se disting mai multe modele pentru noduri. Prin schematizare se obțin legăturile idealizate (fig. 1) utilizate în calcul: nodul perfect rigid se realizează legînd între ele mai multe bare prin încastrări perfecte — și nodul perfect articulat se realizează legînd între ele mai multe bare prin articulații perfecte.

La structurile plane tipurile de reazeme sînt:

1. *Reazemul simplu* (fig. 2, a). Această legătură suprimă deplasarea după o direcție și permite translația pe o direcție normală precum și rotirea în jurul unei axe perpendiculare pe plan, în punctul de reazemare. Echivalentul mecanic al reazemului simplu este o forță — numită reacțiune — cu punct de aplicație și direcție cunoscute. Direcția reacțiunii coincide cu direcția după care deplasarea este blocată. În calcul, reazemul simplu introduce o singură necunoscută și anume mărimea reacțiunii.

2. *Articulația plană* (fig. 2, b). O asemenea legătură suprimă deplasările după orice direcție, lăsînd liberă numai rotirea în jurul unei axe perpendiculare pe plan, în punctul de reazemare. Echivalentul mecanic al unei articulații plane este o forță de direcție și mărime necunoscute, dar cu punct de aplicație cunoscut. În calculul practic nu se lucrează cu mărimea reacțiunii R și cu unghiul α , ci cu proiecțiile reacțiunii pe două direcții normale (în mod obișnuit direcțiile sînt orizontală și verticală).

3. *Încăstrarea plană* (fig. 2, c). Această legătură suprimă orice posibilitate de deplasare a secțiunii în care este plasată. Echivalentul mecanic al unei încastrări plane este o forță căreia nu i se cunoaște nici punctul de aplicație, nici mărimea și nici direcția. În conse-

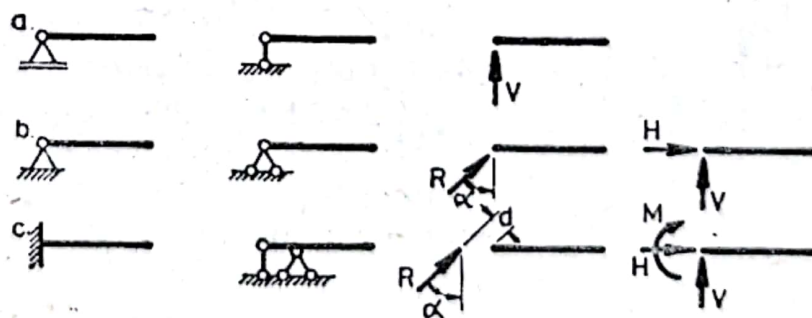


Fig. 2

cintă se presupune că această forță se reduce în raport cu centrul de greutate al secțiunii de încastrare obținând o forță de direcție necunoscută și un moment. Forța se descompune în cele două componente H și V , obținând astfel cele trei necunoscute utilizate în calculul practic.

Aceste rezeme teoretice (perfecte) reprezintă niște schematizări ale legăturilor reale, deoarece pe de o parte s-au neglijat forțele de frecare, iar pe de altă parte rezemarea nu se face prin puncte ci prin suprafețe, care uneori sînt destul de mari. De asemenea, nu întotdeauna se poate realiza încastrarea perfectă în terenul de fundare.

Încărcările pot fi: forțe, momente, variații de temperatură cedări de rezeme, inexactități de montaj, deplasări impuse etc. Ele constituie date ale problemei și ca atare este necesară evaluarea prealabilă a lor. Întrucît, o evaluare exactă este dificilă, uneori imposibilă, datorită diversității acestora și variației lor în timp, este necesar să se admită valori aproximative pentru unele încărcări, stabilite pe baze statistice. Ele se clasifică după diferite criterii și sînt cuprinse în norme oficiale.

Comportarea fizico-mecanică a materialelor de construcții este foarte diferită. Deformațiile depind de mărimile încărcărilor și de timpul și modul de acțiune al lor. Reologia, ramură a Fizicii care se ocupă cu studiul deformării corpurilor, stabilește legătura dintre tensiuni, deformații și timp, sub forma unor ecuații reologice de stare. Ea pune la dispoziția Staticii, stabilității și dinamicii construcțiilor modelele matematice aproximante ale comportării fizico-mecanice a materialelor.

Practica arată că în vederea obținerii unei simplificări a calculelor, avînd la bază schematizările făcute, se pot admite anumite aproximări referitoare la caracterul deformării materialelor folosite obișnuit în construcții. Calculul de ordinul I, în domeniul de comportare perfect elastică a materialului, se dezvoltă pe baza următoarelor ipoteze simplificatoare:

1. Materialul se consideră continuu, omogen și izotrop. Aceste proprietăți se conservă în timp.

2. Materialul se comportă liniar elastic, adică respectă legea lui Hooke, a proporționalității dintre eforturile unitare și deformațiile specifice (fig. 3. a).

3. Relația forță — deplasare este o relație liniară (fig. 3. b).

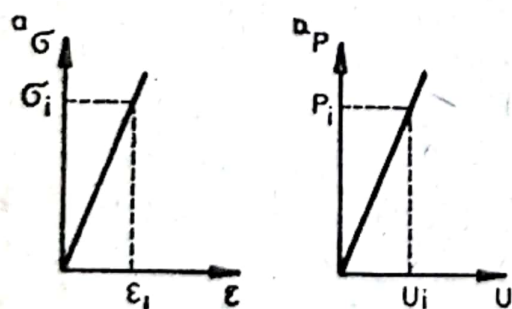


Fig. 3

4. Deplasările secțiunilor fiind mici, comparativ cu dimensiunile structurii, se acceptă pentru curbura fibrei medii deformate forma simplificată $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v_x}{dx^2}$, unde v_x este deplasarea normală pe axa barei.

5. Forma deformată a structurii fiind foarte apropiată de forma inițială, ecuațiile de echilibru static se scriu considerînd forțele raportate la poziția nedeformată a structurii.

Ținînd seama de aceste ipoteze se admite *principiul independenței acțiunii forțelor* sau, cum mai este denumit, *principiul suprapunerii efectelor*, precum și utilizarea condițiilor de echilibru static stabilite în Mecanica teoretică.

Vectorial, echilibrul static se exprimă astfel:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M} = 0. \quad (1)$$

În cazul sistemelor plane de forțe, acestor două ecuații vectoriale le corespund trei ecuații scalare și anume:

$$\begin{aligned} \Sigma X_i &= 0, \\ \Sigma M_{zi} &= \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \\ \Sigma Y_i &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

și care exprimă faptul că suma proiecțiilor tuturor forțelor pe două axe normale să fie egală cu zero, iar suma momentelor tuturor forțelor în raport cu orice punct din plan să fie egală cu zero. Ecuațiile de echilibru static în forma (2) sînt liniar independente.

Condițiile de echilibru static mai pot fi exprimate și în următoarele două variante:

— O ecuație de proiecții și două ecuații de momente, cu restricția ca proiecția să nu fie făcută pe normala pe dreapta ce unește punctele în raport cu care s-au scris ecuațiile de momente. Dacă nu se respectă această restricție, ecuația de proiecții reprezintă o combinație liniară a celor două ecuații de momente și poate fi utilizată pentru verificarea rezultatelor.

— Trei ecuații de momente, cu restricția ca cele trei puncte în raport cu care se scriu ecuațiile să nu fie coliniare. Dacă punctele sînt coliniare, atunci una dintre ecuații reprezintă o combinație liniară a celorlalte două și poate fi utilizată pentru verificarea rezultatelor.

Utilizarea uneia sau alteia dintre aceste modalități de exprimare a condiției de echilibru static, trebuie să aibă la bază ideea obținerii, ori de cîte ori este posibil, de ecuații cu cîte o singură necunoscută.

O altă cale de exprimare a condiției de echilibru static este utilizarea principiului lucrului mecanic virtual, principiu care se enunță astfel: *condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de forțe să fie în echilibru este ca lucrul mecanic produs de forțele sistemului, parcurgând deplasări virtuale să fie egal cu zero*. Prin deplasare virtuală se înțelege o deplasare infinit mică, compatibilă cu sistemul de legături. Lucrul mecanic produs prin parcurgerea deplasărilor virtuale se numește *lucru mecanic virtual*.

Condiția de echilibru static are în acest caz următoarea formă

$$\delta L = \delta L_{ext} + \delta L_{int} = 0, \quad (3)$$

unde δL_{ext} reprezintă lucrul mecanic al forțelor exterioare, iar δL_{int} lucrul mecanic al forțelor interioare.

Din Mecanica teoretică se știe că

$$\delta L_{ext} = \sum P_i \eta_i + \sum M_j \psi_j, \quad (4)$$

P_j și M_j fiind elementele sistemului de forțe dat, iar η_i și ψ_j deplasările virtuale pe direcțiile forțelor.

Din Rezistența materialelor se știe că

$$\delta L_{int} = -\delta W = - \int_V (\sigma_i \epsilon_i + \tau_i \gamma_i) dV, \quad (5)$$

unde W reprezintă energia de deformare acumulată de structură în timpul deformării, σ_i și τ_i sînt eforturile unitare produse de sistemul de forțe dat, iar ϵ_i și γ_i deformațiile specifice produse prin deplasarea virtuală considerată.

Structurile de rezistență se împart în două categorii:

- structuri static determinate,
- structuri static nedeterminate.

Structurile static determinate sînt acele structuri care au un număr minim de legături, necesare asigurării invariabilității geometrice și fixării în plan (sau spațiu).

Pentru structurile plane, condiția de determinare statică se poate exprima astfel

$$N = 3B - 3I - 2A - S = 0, \quad (6)$$

unde B reprezintă numărul de bare, I numărul încastrărilor, A numărul articulațiilor simple, S numărul reazemelor simple, iar N gradul de nedeterminare statică. Este necesar să se menționeze că legăturile între bare și între bare și baza de susținere, trebuie astfel distribuite încît să asigure și invariabilitatea geometrică.

O altă formă de exprimare a condiției de determinare statică, formă care se pretează analizei structurilor în formă de cadre, este următoarea

$$N = 3C - A - 2S = 0, \quad (7)$$

unde C reprezintă numărul de contururi închise (un contur perfect închis fiind de trei ori static nedeterminat), A numărul de articulații simple, iar S numărul de reazeme simple.

La structurile static determinate eforturile se pot calcula utilizând numai condițiile de echilibru static, ceea ce înseamnă că eforturile nu depind de dimensiunile secțiunilor transversale ale barelor și nici de natura materialului.

Structurile static nedeterminate sînt acele structuri care au un număr de legături mai mare decît numărul minim necesar asigurării invariabilității geometrice și fixării în plan (sau spațiu).

Condiția de determinare statică se exprimă astfel

$$N = 3I + 2A + S - 3B > 0 \quad (8)$$

sau

$$N = 3C - A - 2S > 0. \quad (9)$$

Calculul structurilor static nedeterminate necesită utilizarea concomitentă a condițiilor de echilibru static și de continuitate a deformației.

În funcție de ordinea în care se utilizează aceste două condiții, rezultă cele două metode generale de calcul al structurilor static nedeterminate — metoda forțelor și metoda deplasărilor.

Unitățile de măsură utilizate în lucrare sînt cele din sistemul internațional, SI.

STRUCTURI STATIC DETERMINATE

Capitolul I.

CALCULUL REACȚIUNILOR

Determinarea stării de eforturi dintr-o structură presupune cunoașterea reacțiunilor. În acest capitol se prezintă calculul reacțiunilor la structurile static determinate utilizând ecuațiile de echilibru static. Pentru structurile formate din mai multe bare se va aplica, fie metoda separării corpurilor, fie metoda solidificării, metode cunoscute din Mecanica teoretică.

Dacă structura este formată dintr-o singură bară cotită (fig. I.1, a), reacțiunile sînt în număr de trei (fig. I.1, b) și se calculează direct cu cele trei ecuații de echilibru static.

Dacă structura este formată din două sau mai multe bare, legate între ele prin articulații interioare, care nu formează un sistem geometric invariabil, numărul legăturilor cu terenul este mai mare decît trei. În acest caz cele trei ecuații de echilibru static referitoare la ansamblul structurii sînt insuficiente. Problema se poate soluționa aplicînd una din cele două metode indicate în continuare.

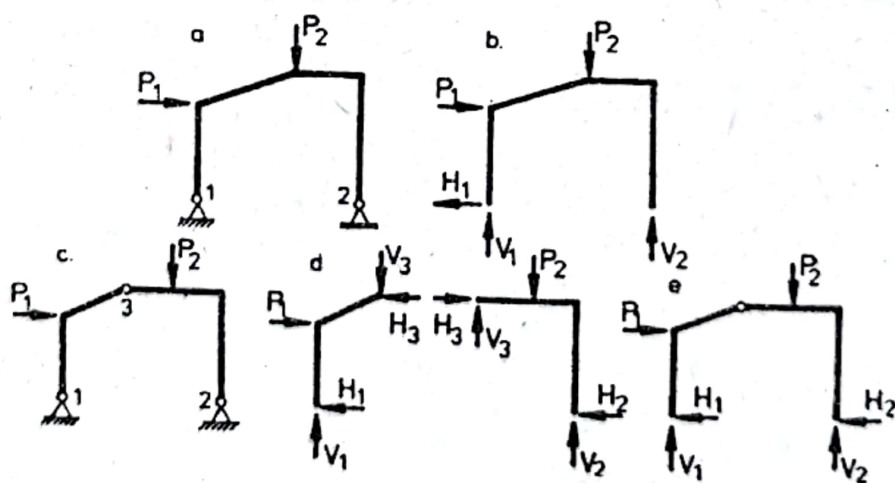


Fig. I.1.

Pentru structura din figura I.1, c, formată din două bare, aplicarea metodei separării corpurilor implică secționarea articulației 3 și introducerea în locul ei a echivalentului mecanic, două perechi de forțe egale și de sens contrar, H_3 și V_3 , conform principiului acțiunii și reacțiunii. Se obțin astfel două bare, cu un total de șase necunoscute. Scriind câte trei ecuații de echilibru static pentru fiecare din cele două bare se obține un număr de ecuații egal cu numărul de necunoscute. Procedând așa, în afara reacțiunilor se calculează și forțele de legătură dintre bare. În general însă acestea din urmă nu sînt necesare pentru determinarea eforturilor.

O rezolvare mai rapidă, și mai elegantă, se realizează utilizînd metoda solidificării. În această metodă se scriu trei ecuații de echilibru static, pentru întreg ansamblul de bare considerat solidificat, și un număr de condiții de momente încovoietoare nule, în raport cu articulațiile interioare, fie pentru forțele de la stînga, fie pentru forțele de la dreapta acestor articulații. În cazul structurii din figura I.1, c, reacțiunile reazemelor sînt în număr de patru (fig. I.1, e). Se scriu trei ecuații de echilibru static și o condiție de moment încovoietor zero în raport cu articulația din secțiunea 3, $\Sigma M_3^{st} = 0$ sau $\Sigma M_3^{dr} = 0$; una din aceste condiții se folosește pentru calculul unei reacțiuni, iar cealaltă devine condiție de verificare.

Se recomandă ca în rezolvarea curentă să se verifice calculul reacțiunilor, pentru a nu transfera greșeli de calcul de la acest nivel, la nivelul calculului eforturilor și deplasărilor.

APLICAȚII

Să se determine reacțiunile reazemelor la următoarele elemente și structuri de rezistență.

Problema 1.1. (fig. 1.1)

Se constată că numărul necunoscutelor este egal cu numărul ecuațiilor de echilibru static.

Scriind ecuațiile de echilibru static se obține:

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0,$$

$$V_1 \cdot 8 - 50 \cdot 6 - 14 \cdot 6 \cdot 1 = 0, \quad V_1 = 48 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad -48 + 150 + 19 \cdot 6 - V_2 = 0,$$

$$V_2 = 86 \text{ kN}.$$

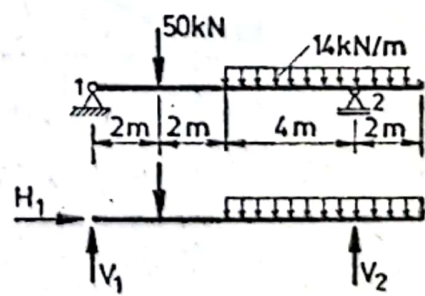


Fig. 1.1

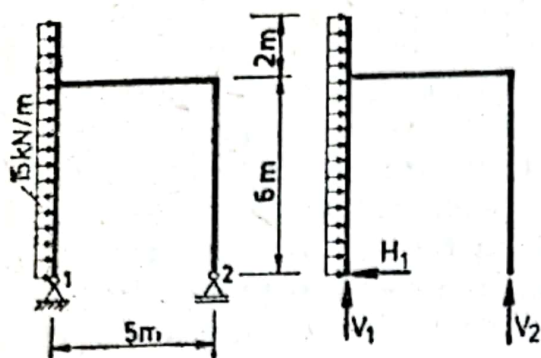


Fig. 1.2

Pentru verificare se utilizează ecuația

$$\Sigma M_1 = 0,$$

$$\Sigma M_1 = -8.86 + 50 \cdot 2 + 19 \cdot 6 \cdot 7 = 0.$$

Rezultă că reacțiunile au fost calculate corect.

Problema 1.2. (fig. 1.2)

$$\Sigma X_i = 0, \quad 15 \cdot 8 - H_1 = 0,$$

$$H_1 = 120 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 5 + 15 \cdot 8 \cdot 4 = 0, \quad V_2 = 98 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 5 + 15 \cdot 8 \cdot 4 = 0, \quad V_1 = -98 \text{ kN}.$$

Semnul (−) rezultat pentru reacțiunea V_1 arată că sensul real al acestei reacțiuni este invers celui considerat în calcul și reprezentat în figura 1.2.

Pentru verificare se folosește ecuația de proiecții

$$\Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Y_i = -98 + 98 = 0,$$

rezultând că reacțiunile au fost corect calculate.

Problema 1.3. (fig. 1.3)

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -10V_2 + 60 \cdot 5 + 20 \cdot 6 \cdot 7 = 0, \quad V_2 = 114 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad 10V_1 + 60 \cdot 8 - 60 \cdot 3 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0, \quad V_1 = 6 \text{ kN}.$$

Verificare;

$$\Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 6 + 20 \cdot 6 - 114 = 0.$$

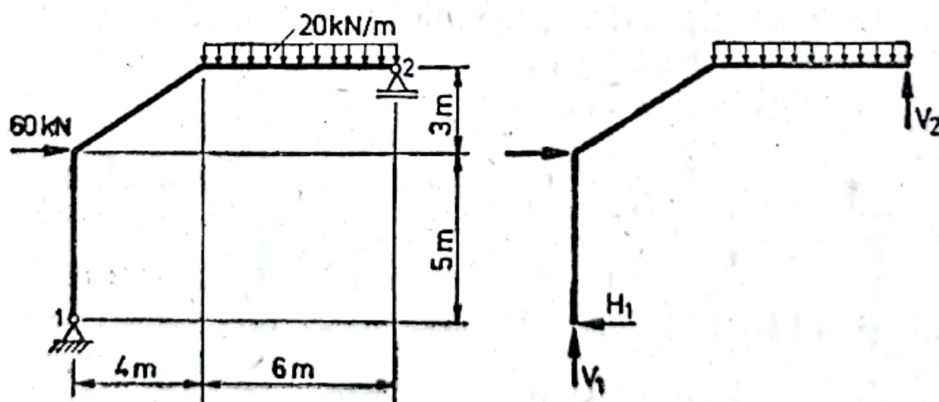


Fig. 1.3

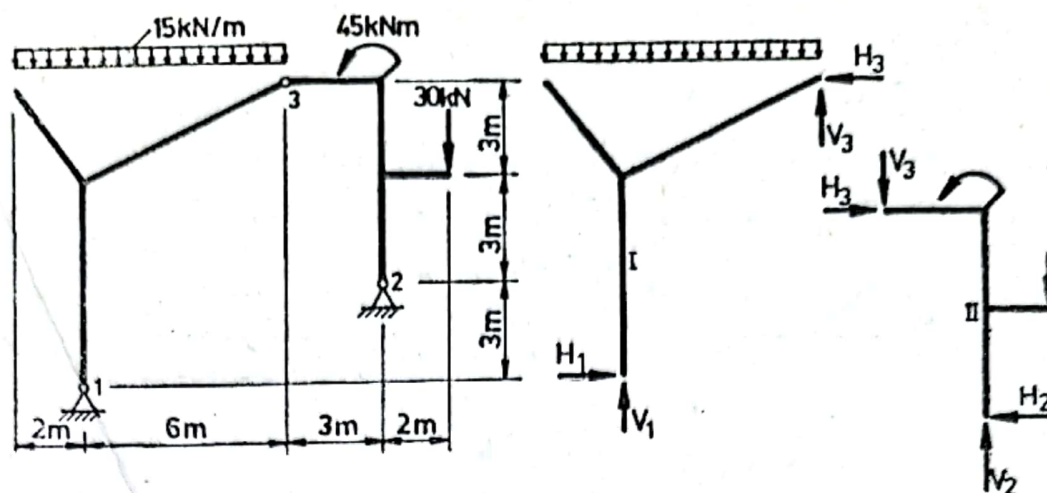


Fig. 1.4

Problema 1.4. (fig. 1.4)

Pentru rezolvare se folosește metoda separării corpurilor. Cele două corpuri se separă prin suprimarea articulației din punctul 3 și introducerea pe fiecare corp a forțelor de legătură, ca forțe egale și de sens contrar (forțe ce reprezintă echivalentul mecanic al articulației). Scriind ecuațiile de echilibru static pentru fiecare corp, se obțin două sisteme de ecuații, din rezolvarea cărora rezultă valorile necunoscute.

Corpul I.

$$\Sigma M_3 = 0, \quad -H_1 \cdot 9 + V_1 \cdot 6 - 15 \cdot 8 \cdot 4 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_3 - 15 \cdot 8 = 0$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_3 \cdot 6 - H_3 \cdot 9 + 15 \cdot 3 \cdot 2 = 0$$

Corpul II.

$$\Sigma M_3 = 0, \quad -V_2 \cdot 3 + H_2 \cdot 6 - 45 + 30 \cdot 5 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_3 + 30 - V_2 = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad H_3 \cdot 6 - V_3 \cdot 3 - 45 + 30 \cdot 2 = 0.$$

Din rezolvarea acestor sisteme de ecuații rezultă reacțiunile:

$$V_1 = 95 \text{ kN}, \quad V_2 = 55 \text{ kN}, \quad H_1 = H_2 = 10 \text{ kN},$$

$$V_3 = 25 \text{ kN}, \quad H_3 = 10 \text{ kN}.$$

Pentru verificare se folosește ecuația $\Sigma Y_i = 0$, scrisă pentru întreaga structură; $\Sigma Y_i = -95 + 15 \cdot 8 - 55 + 30 = 0$.

Problema 1.5. (fig. 1.5)

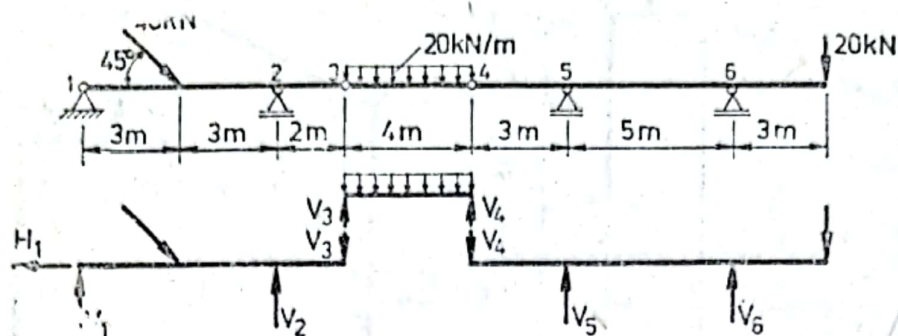


Fig. 1.5

Pentru calculul reacțiunilor grinzii cu console și articulații din figura 1.5, se procedează la descompunerea acesteia în grinzi componente. Ordinea în care se efectuează calculul este următoarea: se rezolvă inițial grinda ce nu transmite direct acțiuni terenului, ci altor părți ale structurii, și după aceea grinzi care au reazeme directe.

Rezolvarea se conduce astfel:

1) Grinda 3-4

$$\sum Y_i = 0, \quad V_3 + V_4 - 20 \cdot 4 = 0$$

$$\sum M_4 = 0, \quad V_3 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_3 = 40 \text{ kN}$$

$$V_4 = 80 - 40 = 40 \text{ kN}$$

2) Grinda 1-2-3

$$\sum X_i = 0, \quad H_1 - 40 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad H_1 = 28,2 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 6 - 40 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 + 40 = 0, \quad V_1 = 0,81 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad 0,81 - 40 \frac{\sqrt{2}}{2} + V_2 - 40 = 0, \quad V_2 = -67,47 \text{ kN}$$

3) Grinda 4-5-6

$$\sum M_6 = 0, \quad -40 \cdot 6 + V_5 \cdot 5 + 20 \cdot 3 = 0, \quad V_5 = 52 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad -40 + 52 + V_6 - 20 = 0, \quad V_6 = 8 \text{ kN}$$

Verificare;

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 20\sqrt{2} \cdot 3 - V_2 \cdot 6 - 20 \cdot 4 \cdot 10 - V_5 \cdot 15 - \\ - V_6 \cdot 20 + 20 \cdot 23 = 0.$$

Problema 1.6. (fig. 1.6)

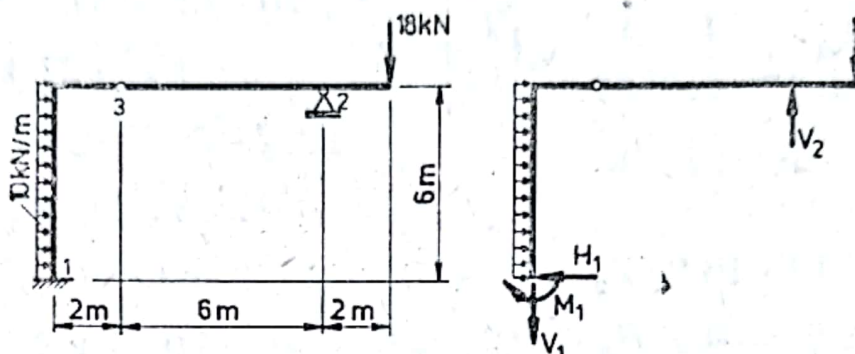


Fig. 1.6

Pentru calculul reacțiunilor se utilizează metoda solidificării. Ecuațiile se scriu astfel încât să conțină, pe cât posibil, câte o singură necunoscută. Deoarece necunoscutele problemei sînt în număr de patru, pentru rezolvare, în afara celor trei ecuații de echilibru static, se folosește o condiție suplimentară, anume condiția de moment încovoietor nul în articulația 3, fie pentru forțele de la stînga acesteia, fie pentru forțele de la dreapta.

$$\begin{aligned} \Sigma M_3^{dr} &= 0, \quad -6V_2 + 8 \cdot 18 = 0, \quad V_2 = 24 \text{ kN} \\ \Sigma X_i &= 0, \quad 10 \cdot 6 - H_1 = 0, \quad H_1 = 60 \text{ kN} \\ \Sigma Y_i &= 0, \quad V_1 - 24 + 18 = 0, \quad V_1 = 6 \text{ kN} \\ \Sigma M_1 &= 0, \quad 18 \cdot 10 - 24 \cdot 8 + 10 \cdot 6 \cdot 3 + M_1 = 0, \\ M_1 &= -168 \text{ kNm.} \end{aligned}$$

Pentru verificare se va folosi condiția

$$\Sigma M_3^{st} = 0, \quad \Sigma M_3^{st} = -168 - 10 \cdot 6 \cdot 3 + 60 \cdot 6 - 6 \cdot 2 = 0.$$

Deoarece M_1 a rezultat cu semnul $(-)$, înseamnă că reacțiunea moment încovoietor are sens invers celui considerat inițial în calcul.

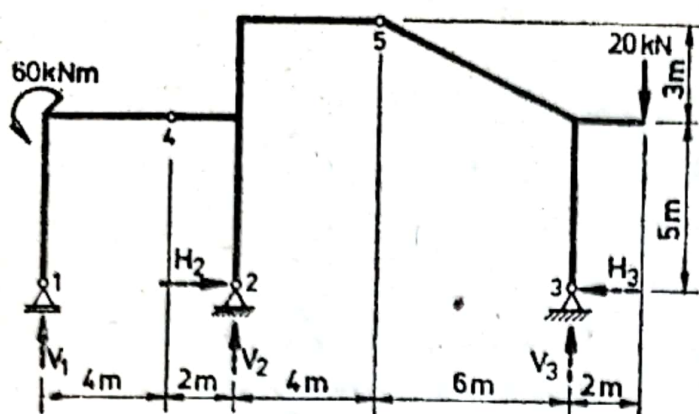


Fig. 1.7

Problema 1.7. (fig. 1.7)

$$\Sigma M_4^{st} = 0, \quad V_1 \cdot 4 - 60 = 0,$$

$$V_1 = 15 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad -V_3 \cdot 10 + 20 \cdot 12 - 60 + 15 \cdot 6 = 0,$$

$$V_3 = 27 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_5^{dr} = 0, \quad -27 \cdot 6 + 20 \cdot 8 + H_3 \cdot 8 = 0, \quad H_3 = 0,25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3 = 0, \quad 15 \cdot 16 + V_2 \cdot 10 - 60 + 20 \cdot 2 = 0, \quad V_2 = -22 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_2 - 0,25 = 0, \quad H_2 = 0,25 \text{ kN}.$$

Verificare;

$$\Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Y_i = -15 + 22 - 27 + 20 = 0.$$

Semnul (−) pentru reacțiunea V_2 arată că sensul real al acesteia este invers celui considerat la început.

Problema 1.8. (fig. 1.8)

$$\Sigma M_5^{dr} = 0, \quad -V_3 \cdot 6 + 60 \cdot 3 = 0, \quad V_3 = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 8 - 30 \cdot 8 + 60 \cdot 5 - 15 \cdot 2 \cdot 9 - 30 + 30 = 0,$$

$$V_1 = 26,25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 8 - 30 \cdot 16 + 60 \cdot 13 - 15 \cdot 2 \cdot 1 + 30 - 30 = 0,$$

$$V_2 = 33,72 \text{ kN}$$

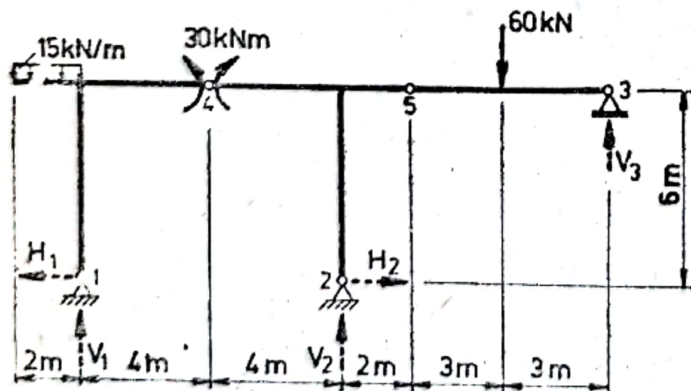


Fig. 1.8

$$\Sigma M_4^{st} = 0, \quad 26,25 \cdot 4 + H_1 \cdot 6 - 15 \cdot 2 \cdot 5 - 30 = 0,$$

$$H_1 = 12,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_4^{dr} = 0, \quad -33,75 \cdot 4 - H_2 \cdot 6 - 30 \cdot 12 + 60 \cdot 9 + 30 = 0$$

$$H_2 = 12,5 \text{ kN}.$$

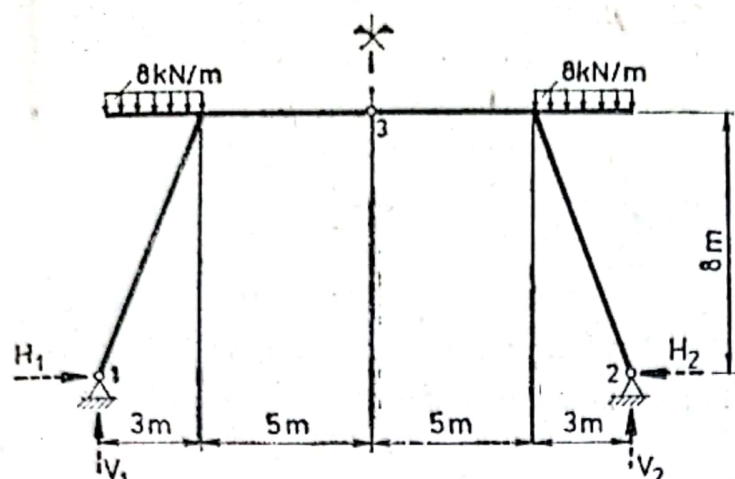


Fig. 1.9

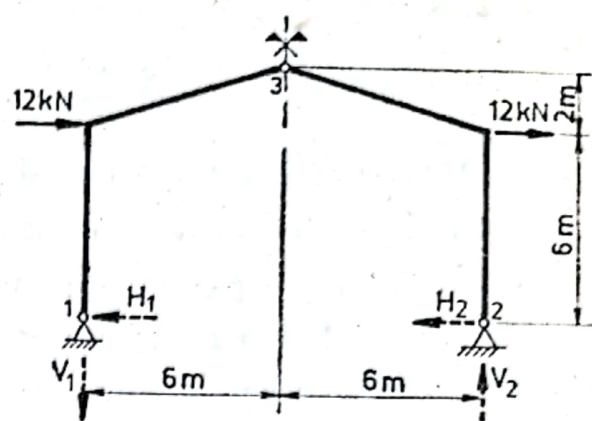


Fig. 1.10

Verificare;

$$\sum Y_i = 0, \quad \sum Y_i = -26,25 - 33,75 - 30 + 15 \cdot 2 + 60 = 0.$$

Problema 1.9. (fig. 1.9)

$$\sum M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 16 + 8 \cdot 3 \cdot 14,5 + 8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, \quad V_2 = 24 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 16 - 8 \cdot 3 \cdot 14,5 - 8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, \quad V_1 = 24 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{st} = 0, \quad 24 \cdot 8 - 8 \cdot 3 \cdot 6,5 - H_1 \cdot 8 = 0, \quad H_1 = 4,5 \text{ kN}$$

$$\sum X_i = 0, \quad 4,5 - H_2 = 0, \quad H_2 = 4,5 \text{ kN}.$$

Verificare;

$$\sum M_3^{dr} = 0, \quad \sum M_3^{dr} = -24 \cdot 8 + 4,5 \cdot 8 + 8 \cdot 3 \cdot 6,5 = 0.$$

Se constată că la structurile simetrice, încărcate simetric, reacțiunile rezultă simetrice.

Problema 1.10. (fig. 1.10)

Pentru determinarea reacțiunilor se scriu trei ecuații de echilibru static pentru ansamblul structurii și o ecuație de moment încovoietor zero în raport cu articulația din 3, pentru forțele de la stînga sau de la dreapta secțiunii 3.

$$\sum M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 12 + 12 \cdot 6 + 12 \cdot 6 = 0, \quad V_2 = 12 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad V_1 - 12 = 0, \quad V_1 = 12 \text{ kN}$$

$$\sum M_3^{st} = 0, \quad -12 \cdot 6 - 12 \cdot 2 + H_1 \cdot 8 = 0, \quad H_1 = 12 \text{ kN}$$

$$\sum X_i = 0, \quad 12 + 12 - 12 - H_2 = 0, \quad H_2 = 12 \text{ kN}.$$

Pentru verificare se poate utiliza ecuația de moment încovoietor zero în articulația 3, pentru forțele de la dreapta acesteia;

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad \Sigma M_3^{dr} = -12 \cdot 6 + 12 \cdot 8 - 12 \cdot 2 = 0.$$

Deci reacțiunile au fost calculate corect.

Această structură este simetrică, iar încărcarea este antisimetrică. Se constată că reacțiunile au rezultat antisimetrice. Se poate concluziona că la structurile simetrice, încărcate antisimetric, reacțiunile sînt antisimetrice.

Căpitolul II

GRINDA DREAPTĂ ȘI SISTEME DE GRINZI DREPTE

Acțiunea încărcărilor asupra unei structuri provoacă apariția eforturilor, a căror determinare este necesară în vederea dimensionării elementelor ce o alcătuiesc.

Calculul eforturilor se face folosind metoda secțiunilor. Efectuând o secționare completă printr-o bară, se suprimă continuitatea acesteia, iar pe cele două fețe obținute se pun în evidență forțele de legătură corespunzătoare (fig. II.1,6). Aceste forțe, care pentru bară sînt interioare, poartă numele de *eforturi*. Ele sînt reprezentate prin perechi de forțe și momente (N_i , T_i , M_i) aplicate pe cele două fețe ale secțiunii. În funcție de sensul de parcurgere a barei, eforturile pe fața din dreapta a secțiunii se obțin efectuînd reducerea tuturor forțelor exterioare care acționează în stînga secțiunii, în raport cu centrul ei de greutate. Asemănător, eforturile pe fața din stînga a secțiunii se obțin efectuînd reducerea forțelor exterioare care acționează în dreapta secțiunii, în raport cu centrul ei de greutate. Se definesc:

a) Componenta N_i după tangenta la axa barei (în cazul barei drepte după direcția barei), numită *forța axială*,

b) Componenta T_i după normala pe axa barei, numită *forță tăietoare*,

c) Momentul M_i în raport cu centrul de greutate al secțiunii, numit *moment încovoietor*.

După modul în care se definesc, eforturile rezultă strîns

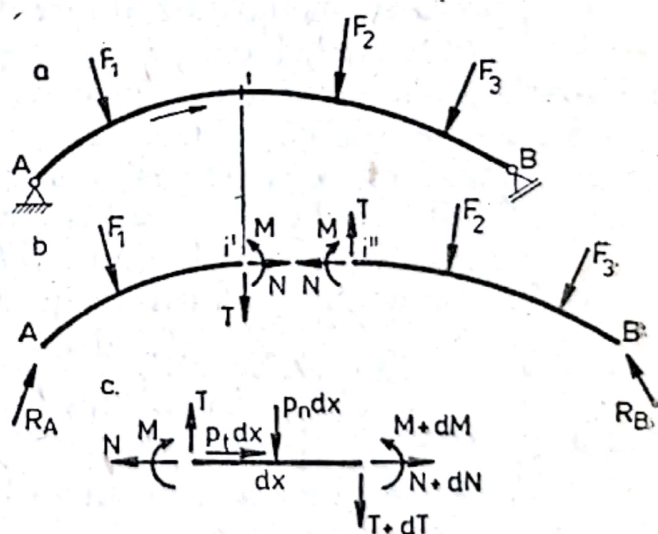


Fig. II.1

legate de secțiune. Determinarea lor necesită acceptarea unei convenții de semne. Astfel :

- forța axială este pozitivă dacă are ca efect întinderea barei,
- forța tăietoare este pozitivă dacă tinde să rotească bara în sens orar,

- momentul încovoietor este pozitiv când întinde acea zonă a secțiunii ce se găsește de partea unui observator care trebuie astfel așezat încît să privească parcurgerea barei de la stînga la dreapta (pentru bară se stabilește deci un sens de parcurgere — fig. II.1, a).

Dimensionarea structurii presupune cunoașterea eforturilor în punctele caracteristice, adică în secțiunile cele mai solicitate. Cum aceste secțiuni nu se cunosc dinainte, este necesar să se stabilească modul de variație al eforturilor în lungul tuturor barelor. Se ajunge astfel la noțiunea de *diagramă de efort*. Construirea diagramelor de eforturi este mult ușurată de existența unor relații între intensitatea încărcării și eforturile ce iau naștere în secțiunea curentă a barei. În felul acesta se poate preciza de la început configurația fiecărei diagrame, urmînd ca apoi să se calculeze ordonatele care interesează. Relațiile sînt utile în special atunci cînd structura este alcătuită din bare drepte și se stabilesc studiind echilibrul unui element de bară de lungime infinit mică dx (fig. II.1, c). Ele sînt :

$$\frac{dN}{dx} = -p_t, \quad \frac{dT}{dx} = -p_n, \quad \frac{dM}{dx} = T, \quad (\text{II.1})$$

unde p_t reprezintă intensitatea componentei tangente la axa barei, iar p_n reprezintă intensitatea componentei normale pe axa barei a încărcării în secțiunea curentă (fig. II.1, c).

Interpretarea ecuațiilor diferențiale (II.1) conduce la :

- ecuația curbei care mărginește diagrama N este cu un grad mai mare decît ecuația curbei care mărginește diagrama p_t , ecuația curbei care mărginește diagrama T este cu un grad mai mare decît ecuația curbei care mărginește diagrama p_n , iar ecuația curbei care mărginește diagrama M este cu un grad mai mare decît diagrama curbei care mărginește diagrama T ,

- în cazul curent întîlnit în practică, al încărcărilor acționînd normal pe axa barei, rezultă $\frac{dN}{dx} = 0$, deci forța axială este constantă pe intervalul de bară pe care $p_t = 0$,

- deoarece anularea primei derivate reprezintă un punct de extrem pentru funcția respectivă, în secțiunea în care se anulează forța tăietoare, momentul încovoietor este extrem,

— anularea derivatei a doua a funcției ($p_n = 0$) reprezintă un extrem pentru prima derivată (T extrem) și trecerea printr-un punct de inflexiune a funcției (M),

— pentru porțiunile din structură pe care $p_n = 0$, forța tăietoare este constantă, iar diagrama de moment încovoietor are o variație liniară.

Dacă în anumite puncte ale structurii acționează încărcări concentrate (forțe și momente), în diagramele de eforturi intervin variații caracteristice. Astfel:

— în dreptul unei forțe concentrate care are direcția axei barei, în diagrama N se produce un salt egal cu mărimea forței, în sensul de acțiune al acesteia,

— în dreptul unei forțe concentrate normală pe axa barei, în diagrama T se produce un salt egal cu mărimea forței, în sensul de acțiune al acesteia, iar în diagrama M apare un vîrf,

— în dreptul unui moment concentrat, în diagrama M se produce un salt egal cu mărimea momentului, în sensul de acțiune al acestuia.

Particularitățile enunțate nu influențează restul diagramelor care respectă relațiile diferențiale (II.1).

În mod obișnuit ca linii de referință pentru reprezentarea diagramelor se iau axele barelor, iar ordonatele se măsoară normal pe ele. La trasarea diagramelor de eforturi se vor avea în vedere convențiile de semne adoptate.

Diagramele N și T au semnele (+) sau (—). O diagramă (N sau T) se desenează de o singură parte a liniei de referință cînd efortul pe întreaga bară are același semn sau de o parte și de alta a liniei de referință cînd pe bară efortul are semne diferite pe porțiuni diferite (semnele sînt obligatorii).

Diagrama M se desenează *întotdeauna* de partea fibrei întinse fiind legată astfel de sensul real de deformare (semnele pot lipsi).

Sistemele de grinzi drepte, denumite grinzi Gerber, sînt alcătuite dintr-o succesiune de grinzi drepte, cu sau fără console, legate între ele prin articulații interioare (fig. II.2).

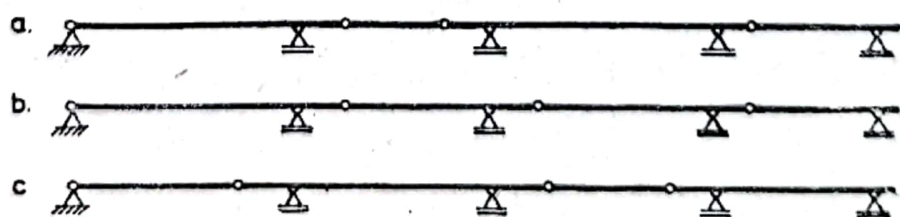


Fig. II.2



Din analiza modului de alcătuire rezultă că o grindă Gerber este formată din părți principale și părți secundare.

Grinda principală este o grindă care preia și transmite direct la baza de susținere toate încărcările ce îi revin. Grinda secundară este grinda care nu transmite deloc sau transmite numai parțial încărcările ce îi revin, la baza de susținere; o cotă parte a acestor încărcări se transmite prin intermediul altor grinzi ale ansamblului.

Alcătuirea recomandabilă este aceea obținută printr-o succesiune de grinzi principale și secundare, așa cum s-a reprezentat în figura II.2, a și c.

Calculul reacțiunilor și eforturilor se poate efectua, fie pentru ansamblu, fie descompunând grinda Gerber în grinzile componente, rezolvarea efectuându-se, în acest din urmă caz, începând cu grinzile secundare și trecând apoi la cele principale. Prin descompunerea în grinzile componente se obțin și forțele din articulațiile interioare, ceea ce facilitează trasarea diagramelor de eforturi și înțelegerea aprofundată a modului de lucru al ansamblului.

Referitor la trasarea diagramelor de eforturi, pe ansamblu, se impun următoarele observații:

— în dreptul unei articulații interioare unde nu este aplicată o forță exterioară concentrată, diagrama de forță tăietoare nu suferă nici o modificare, iar diagrama de moment încovoietor trece prin valoarea zero, fără schimbare de pantă,

— în dreptul unei articulații interioare, unde este aplicată o forță exterioară concentrată, în diagrama de forță tăietoare are loc un salt, egal cu valoarea forței concentrate și în sensul de acțiune al acesteia, iar diagrama de moment încovoietor trece prin valoarea zero, dar cu schimbare de pantă (apare un vîrf).

APLICAȚII

Să se traseze diagramele de eforturi la grinzile și sistemele de grinzi drepte, indicate la fiecare aplicație.

Problema 2.1. (fig. 2.1)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 l - Pb = 0, \quad V_1 = \frac{Pb}{l}$$

$$\Sigma Y_i = 0,$$

$$V_1 + V_2 - P = 0, \quad V_2 = \frac{Pa}{l}.$$

Diagrama de forță tăietoare se deschide printr-un salt, cu valoarea V_1 și rămîne constantă pînă în punctul de aplicație al forței concentrate P . În dreptul acestei forțe are loc un salt, egal cu P și în sensul său de acțiune.

În această secțiune, forța tăietoare trece de la valoarea $(+)$ $\frac{Pb}{l}$ la valoarea $(-)$ $\frac{Pa}{l}$.

În continuare, forța tăietoare rămîne constantă, iar diagrama se închide în secțiunea 2 printr-un salt egal cu V_2 .

Diagrama de moment încovoietor are variație liniară, cu schimbare de pantă (vîrf) în secțiunea în care este aplicată forța concentrată P . Valoarea maximă a momentului încovoietor, calculată, fie pentru forțele de la stînga, fie pentru forțele de la dreapta, este $\frac{Pab}{l}$. Diagrama s-a figurat de partea fibrei întinse.

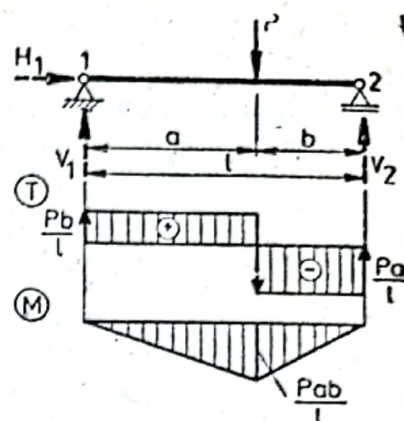


Fig. 2.1

Problema 2.2. (fig. 2.2)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_2 - pl = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 l - pl \frac{l}{2} = 0$$

$$V_1 = \frac{pl}{2}, \quad V_2 = \frac{pl}{2}.$$

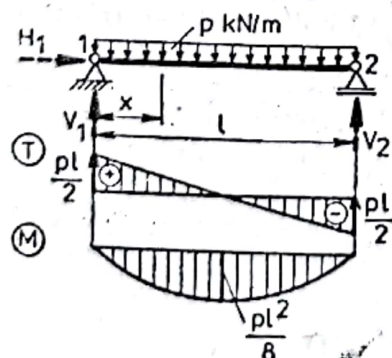


Fig. 2.2

Forța tăietoare în secțiunea 1 este egală cu reacțiunea V_1 . Într-o secțiune curentă forța tăietoare are expresia

$$T_x = p \frac{l}{2} - px,$$

ceea ce reprezintă o variație liniară.

Pentru $x = 0$, $T_x = T_1 = p \frac{l}{2}$ și pentru $x = l$, $T_x = T_2 = -p \frac{l}{2}$

Se observă că forța tăietoare se anulează la mijlocul deschiderii. Momentul încovoietor în secțiunea curentă are expresia

$$M_x = p \frac{l}{2} x - p \frac{x^2}{2},$$

ceea ce reprezintă o variație de gradul doi (parabolică).

Valoarea maximă a momentului încovoietor se obține în secțiunea în care se anulează forța tăietoare, adică pentru $x = \frac{l}{2}$.

Această valoare maximă este

$$M_{max} = p \frac{l^2}{8}.$$

În secțiunile din reazeme, $x = 0$ și $x = l$, rezultă $M = 0$.

Problema 2.3. (fig. 2.3)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_2 - \frac{pl}{2} = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 l - p \frac{l}{2} \frac{1}{3} l = 0$$

$$V_1 = \frac{pl}{6}, \quad V_2 = \frac{pl}{3}.$$

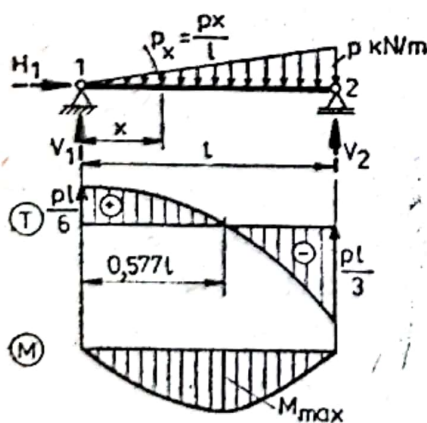


Fig. 2.3

Forța tăietoare variază după o curbă de gradul doi. Punctul unde se anulează se află la $0,577l$ de reazemul 1.

$$T_{x_0} = \frac{pl}{6} - \frac{1}{2} \frac{px_0}{l} x_0 = \frac{pl}{6} \left(1 - 3 \frac{x_0^2}{l^2} \right) = 0,$$

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l.$$

În secțiunea 1 curba forței tăietoare are tangenta egală cu zero, deoarece în această secțiune $p = 0$.

Momentul încovoietor variază după o curbă de gradul trei, avînd valoarea maximă la $0,577l$ de reazemul 1,

$$M_x = \frac{pl}{6} x - \frac{px}{l} \frac{x}{2} \frac{x}{3} = \frac{pl}{6} x \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Pentru $x = 0,577 l$, se obține $M_{max} = 0,064 pl^2$.

Problema 2.4. (fig. 2.4)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_2 - 30 \cdot 3 = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 9 - 30 \cdot 3 \cdot 5,5 = 0$$

$$V_1 = 55 \text{ kN}, \quad V_2 = 90 - 55 = 35 \text{ kN}.$$

Secțiunea de moment încovoietor maxim corespunde secțiunii în care forța tăietoare se anulează:

$$T_x = 0, \quad V_1 - p(x_0 - 2) = 0$$

$$55 - 30(x_0 - 2) = 0, \quad x_0 = 3,83 \text{ m}$$

$$M_{max} = V_1 x_0 - p(x_0 - 2) \left(\frac{x_0 - 2}{2} \right) = 160,43 \text{ kNm}.$$

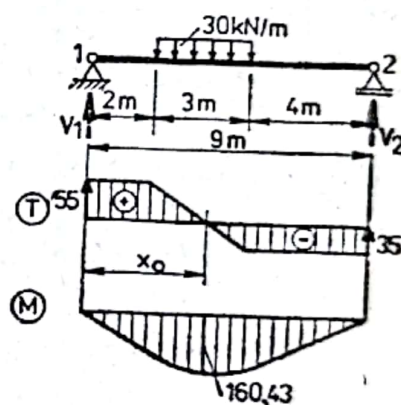


Fig. 2.4

Problema 2.5. (fig. 2.5)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_2 - 60 - 30 = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 12 - 60 \cdot 9 - 30 \cdot 4 = 0$$

$$V_1 = 55 \text{ kN}, \quad V_2 = 35 \text{ kN}.$$

Problema 2.6. (fig. 2.6)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_2 - 80 - 80 = 0$$

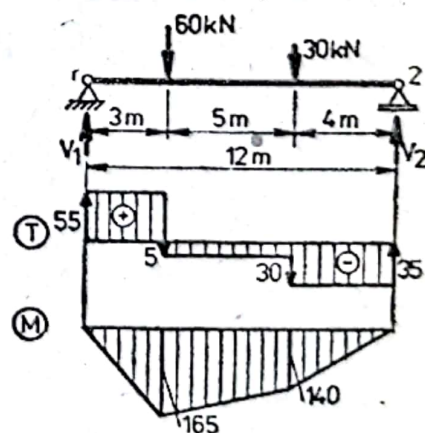


Fig. 2.5

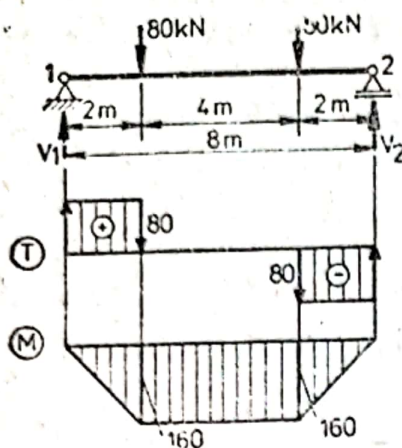


Fig. 2.6

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 8 - 80 \cdot 6 - 80 \cdot 2 = 0$$

$$V_1 = 80 \text{ kN}, \quad V_2 = 80 \text{ kN}.$$

Reacțiunile sînt egale, deoarece forțele date sînt egale și așezate simetric față de cele două reazeme.

Pe intervalul dintre cele două forțe, forța tăietoare este nulă, iar momentul încovoietor este constant. Valoarea maximă a momentului încovoietor este

$$M_{max} = V_1 \cdot 2 = 160 \text{ kNm}.$$

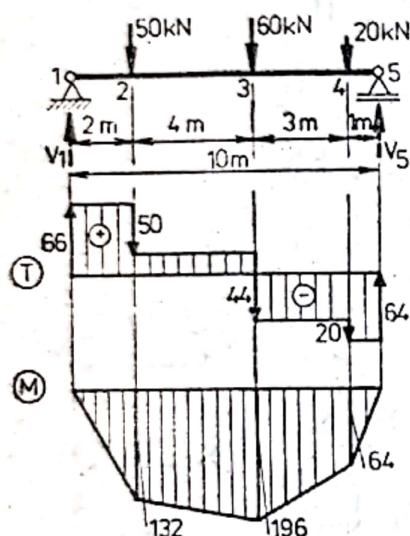


Fig. 2.7

Problema 2.7. (fig. 2.7)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_5 - 50 - 60 - 20 = 0$$

$$\Sigma M_5 = 0,$$

$$V_1 \cdot 10 - 50 \cdot 8 - 60 \cdot 4 - 20 \cdot 1 = 0$$

$$V_1 = 66 \text{ kN}, \quad V_5 = 64 \text{ kN}.$$

Calculul eforturilor:

$$M_{max} = V_1 \cdot 6 - 50 \cdot 4 = 396 - 200 = 196 \text{ kNm}.$$

$$M_2 = V_1 \cdot 2 = 132 \text{ kNm}.$$

$$M_4 = V_5 \cdot 1 = 64 \text{ kNm}$$

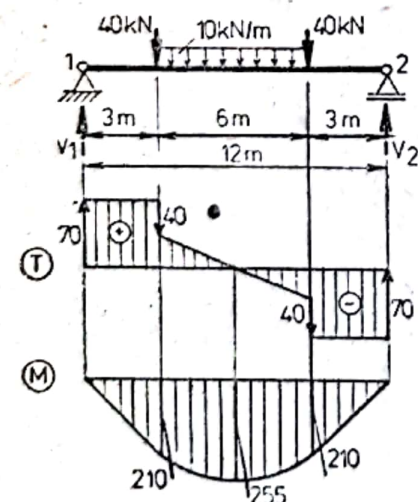


Fig. 2.8

Problema 2.8. (fig. 2.8)

Încărcarea fiind simetrică, reacțiunile sînt egale,

$$V_1 = V_2 = 70 \text{ kN}.$$

Forța tăietoare se anulează la mijlocul deschiderii, iar momentul încovoietor maxim are valoarea

$$M_{max} = 70 \cdot 6 - 40 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 255 \text{ kNm}.$$

Problema 2.9. (fig. 2.9)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_4 - 40 - 20 \cdot 5 = 0$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad V_1 \cdot 12 - 40 \cdot 10 - 20 \frac{5^2}{2} = 0$$

$$V_1 = 54,17 \text{ kN}, \quad V_4 = 85,83 \text{ kN}.$$

Calculul eforturilor:

$$T_{x_0} = 54,17 - 40 - 20 x_{10} = 0,$$

$$x_{10} = 0,71 \text{ m}, \quad x_0 = 7 + x_{10} = 7,71 \text{ m}$$

$$M_{max} = 54,17 \cdot 7,71 -$$

$$- 40 \cdot 5,71 - 20 \frac{0,71^2}{2} = 184,21 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 54,17 \cdot 2 = 108,34 \text{ kNm},$$

$$M_3 = 54,17 \cdot 7 - 40 \cdot 5 = 179,19 \text{ kNm}.$$

Problema 2.10. (fig. 2.10)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 9 - 40 \cdot 6 - 20 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = 0,$$

$$V_1 = 31,38 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_2 - 40 - 10\sqrt{2} = 0, \quad V_2 = 22,76 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 - 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad H_1 = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ kN}.$$

Deoarece reacțiunea orizontală rezultă diferită de zero, pe intervalul dintre reazemul 1 și punctul de aplicare al forței înclinate, apare forța axială de compresiune, egală cu H_1 :

Problema 2.11. (fig. 2.11)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad -V_1 + V_2 = 0$$

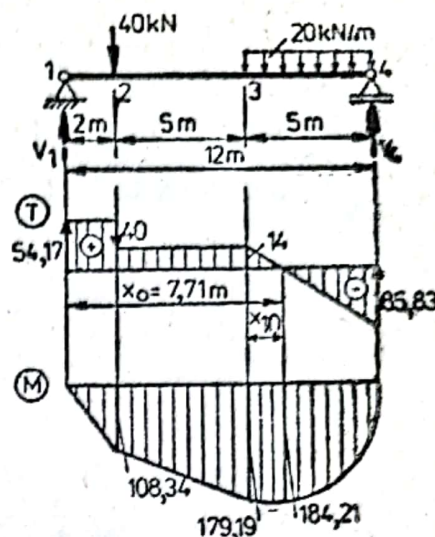


Fig. 2.9

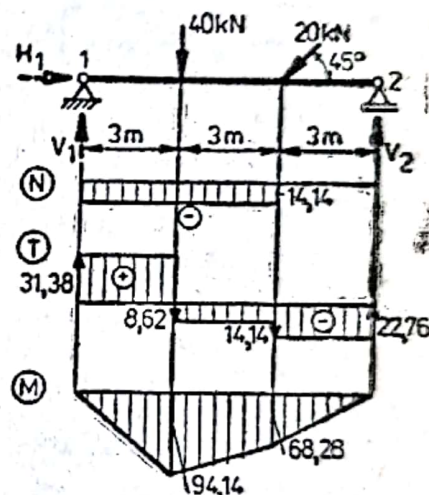


Fig. 2.10

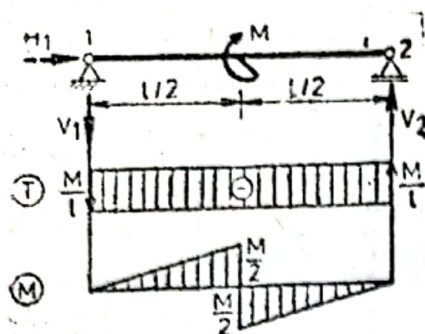


Fig. 2.11

$$\Sigma M_2 = 0, \quad M - V_1 l = 0$$

$$V_1 = \frac{M}{l}, \quad V_2 = \frac{M}{l}$$

Forța tăietoare este constantă și negativă pe toată lungimea grinzii.

Momentul încovoietor variază liniar, iar în secțiunea în care este aplicat momentul concentrat, în diagramă are loc un salt, egal cu M și în semnul său de acțiune. Cele două ramuri ale diagramei de moment încovoietor sînt paralele.

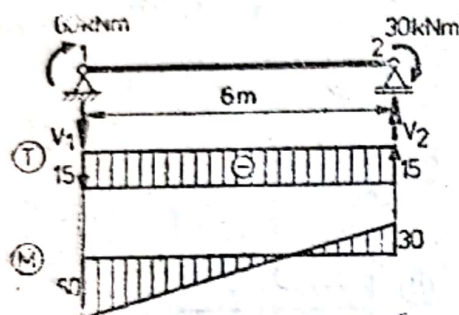


Fig. 2.12

Problema 2.12. (fig. 2.12)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad 60 - V_1 \cdot 6 + 30 = 0,$$

$$V_1 = 15 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 - V_2 = 0, \quad V_2 = 15 \text{ kN}.$$

Forța tăietoare este constantă pe întreaga lungime a grinzii. Momentul încovoietor variază liniar, cu salturi în secțiunile de la extremități, acolo unde sînt aplicate momentele concentrate.

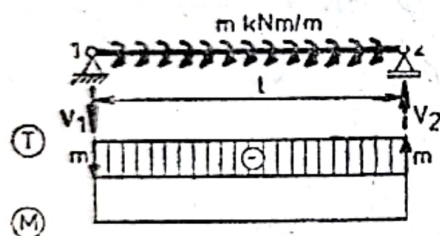


Fig. 2.13

Problema 2.13. (fig. 2.13)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad -V_1 l + ml = 0, \quad V_1 = m$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad -V_1 + V_2 = 0, \quad V_2 = m.$$

Forța tăietoare este constantă pe întreaga lungime a grinzii, iar momentul încovoietor este egal cu zero (a se vedea relația II.2).

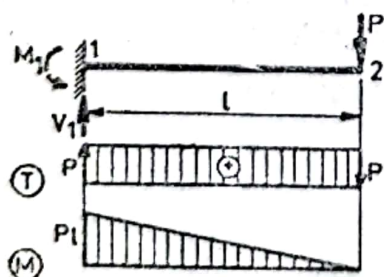


Fig. 2.14

Problema 2.14. (fig. 2.14)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 - P = 0, \quad V_1 = P$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -M_1 + Pl = 0, \quad M_1 = Pl.$$

Forța tăietoare este constantă, iar momentul încovoietor variază liniar avînd un salt în secțiunea 1, egal cu M_1 .

Problema 2.15. (fig. 2.15)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 - pl = 0, \quad V_1 = pl$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -M_1 + pl \frac{l}{2} = 0,$$

$$M_1 = p \frac{l^2}{2}.$$

Forța tăietoare variază liniar, iar momentul încovoietor variază după o curbă de gradul II. Curba M este tangentă în secțiunea 2 la linia de referință, deoarece panta T_2 este egală cu zero în această secțiune.

Problema 2.16. (fig. 2.16)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 - p \frac{l}{2} = 0, \quad V_1 = p \frac{l}{2}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad M_1 - p \frac{l}{2} \frac{l}{3} = 0, \quad M_1 = p \frac{l^2}{6}.$$

Calculul eforturilor în secțiunea curentă:

Scriind expresiile eforturilor, cu luarea în considerare a forțelor de la dreapta, se obține:

$$T_x = p_x \frac{l-x}{2} = p \frac{(l-x)^2}{2l}, \text{ unde } p_x = p \frac{l-x}{l},$$

$$M_x = p_x \frac{l-x}{2} \frac{1}{3} (l-x) = p \frac{x(l-x)^3}{6l}.$$

Forța tăietoare variază după o curbă de gradul II, iar momentul încovoietor după o curbă de gradul III.

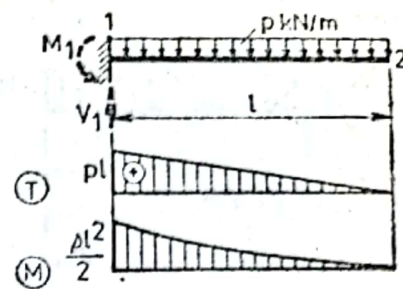


Fig. 2.15

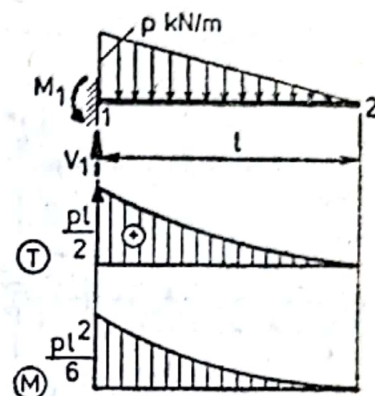


Fig. 2.16

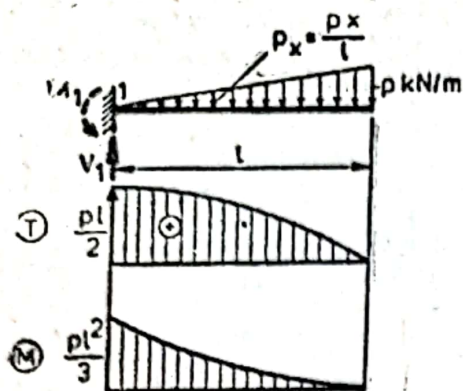


Fig. 2.17

Problema 2.17. (fig. 2.17)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 = \frac{pl}{2}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -M_1 + \frac{pl}{2} \cdot \frac{2l}{3} = 0,$$

$$M_1 = \frac{pl^2}{3}.$$

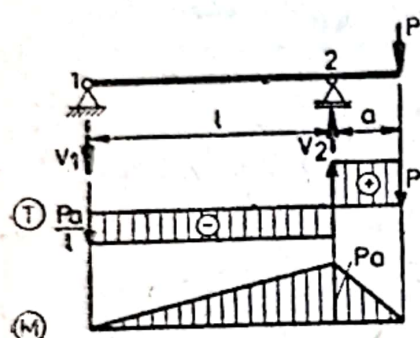


Fig. 2.18

Calculul eforturilor în secțiunea curentă:

$$T_x = V_1 - p_x \frac{x}{2} = p \frac{l}{2} - \frac{px^2}{2l},$$

$$\text{unde } p_x = p \frac{x}{l},$$

$$T_x = \frac{pl}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

$$M_x = \frac{pl^2}{3} - \frac{pl}{2} x + \frac{px^3}{6l} = \frac{pl^2}{6} \left(2 - 3 \frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Problema 2.18. (fig. 2.18)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad -V_1 l + Pa = 0, \quad V_1 = \frac{Pa}{l}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad P(l + a) - V_2 l = 0, \quad V_2 = P \frac{l + a}{l}.$$

Momentul încovoietor maxim apare în secțiunea din dreptul reazemului 2 și are valoarea $M_2 = Pa$.

Problema 2.19. (fig. 2.19)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 8 - 70 \cdot 5 + 15 \cdot 2 \cdot 1 = 0, \quad V_1 = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 70 \cdot 3 - V_2 \cdot 8 + 15 \cdot 2 \cdot 9 = 0, \quad V_2 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad 40 - 70 + 60 - 2 \cdot 15 = 0.$$

Forța tăietoare este constantă pe cele două intervale dintre reazeme și variază liniar pe consolă.

Momentul încovoietor maxim în câmp este

$M_{max} = V_1 \cdot 3 = 120 \text{ kNm}$, iar în secțiunea 2 este

$$M_2 = 15 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \text{ kNm}.$$

Problema 2.20. (fig. 2.20)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad -30 \cdot 12 + V_1 \cdot 10 - 50 \cdot 6 + 40 \cdot 2 = 0,$$

$$V_1 = 58 \text{ kN}.$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -30 \cdot 2 + 50 \cdot 4 - V_2 \cdot 10 + 40 \cdot 12 = 0,$$

$$V_2 = 62 \text{ kN}.$$

Momentul încovoietor maxim din câmp este

$$M_{max} = -30 \cdot 6 + 58 \cdot 4 = 52 \text{ kNm}.$$

Problema 2.21. (fig. 2.21)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_2 - p(l+a) = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 l - p \frac{l^2}{2} + p \frac{a^2}{2} = 0$$

$$V_1 = p \frac{l^2 - a^2}{2l}, \quad V_2 = p \frac{(l+a)^2}{2l}.$$

Calculul eforturilor:

$$T_{x_0} = 0, \quad V_1 - p x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{l^2 - a^2}{2l}.$$

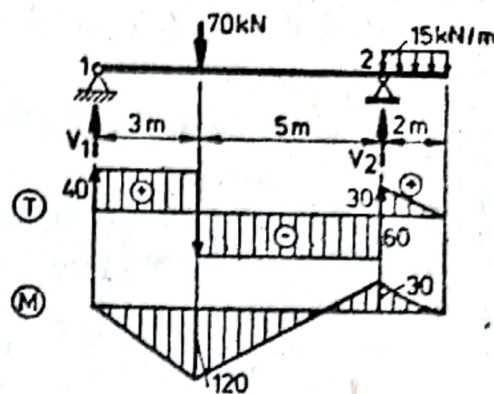


Fig. 2.19

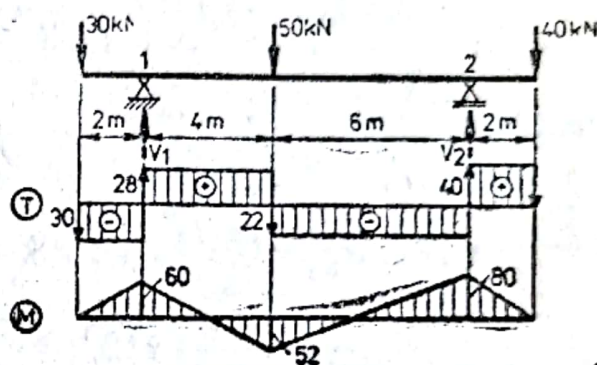


Fig. 2.20

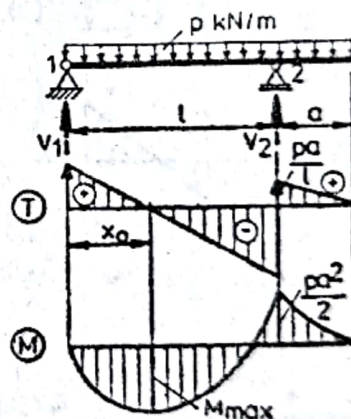


Fig. 2.21

Momentul încovoietor maxim în câmp va fi

$$M_{max} = V_1 x_0 - \frac{p x_0^2}{2} = \frac{p}{8l^2} (l^2 - a^2)^2.$$

Din condiția ca momentele încovoietoare din câmp și de pe reazem să fie egale, se poate determina lungimea optimă a consolei,

$$\frac{p a^2}{2} = \frac{p}{8l^2} (l^2 - a^2)^2,$$

$$a^4 - 6a^2 l^2 + l^4 = 0,$$

$$a = l \sqrt{3 - \sqrt{8}} = 0,414l.$$

Problema 2.22. (fig. 2.22)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 8 - 8 \cdot 6 \cdot 7 + 20 \cdot 1,5 = 0$$

$$V_1 = 38,25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0,$$

$$8 \cdot 6 \cdot 1 - V_2 \cdot 8 + 20 \cdot 9,5 = 0,$$

$$V_2 = 29,75 \text{ kN}.$$

Momentul încovoietor maxim în câmp este:

$$T_{x_0} = 0, \quad V_1 - 8 \cdot 2 - 8x_0 = 0,$$

$$x_0 = 2,78 \text{ m}$$

$$M_{max} = V_1 \cdot 2,78 - 8 \frac{2,78^2}{2} =$$

$$= 75,42 \text{ kNm}.$$

Problema 2.23. (fig. 2.23)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 9 - 54 \cdot 5 + 45 = 0,$$

$$V_1 = 25 \text{ kN}$$

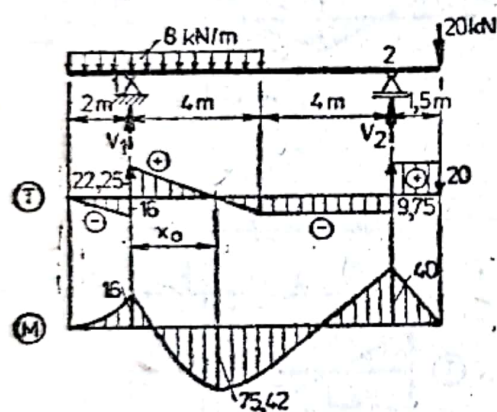


Fig. 2.22

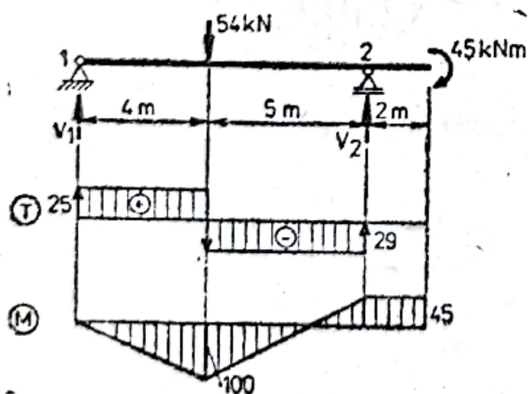


Fig. 2.23

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 54 \cdot 4 - V_2 \cdot 9 + 45 = 0,$$

$$V_2 = 29 \text{ kN}.$$

Momentul încovoietor maxim în câmp este

$$M_{max} = 25 \cdot 4 = 100 \text{ kNm}.$$

Problema 2.24. (fig. 2.24)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0,$$

$$-15 \cdot 2 \cdot 11 + V_1 \cdot 10 - 60 \cdot 5 + 15 \cdot 2 \cdot 1 = 0,$$

$$V_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0,$$

$$-15 \cdot 2 \cdot 1 + 60 \cdot 5 - V_2 \cdot 10 + 15 \cdot 2 \cdot 11 = 0,$$

$$V_2 = 60 \text{ kN}.$$

Încărcarea fiind simetrică, reacțiunile rezultă simetrice, diagrama de forță tăietoare antisimetrică, iar diagrama de moment încovoietor simetrică.

Problema 2.25. (fig. 2.25)

În acest caz, transmiterea efectului forței concentrate la grinda simplu rezemată 1—2 se realizează prin intermediul altor elemente de rezistență (longeroni și antretoaze). Are loc, așa-numita, transmitere indirectă.

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 15 - 150 \cdot 7,5 = 0, \quad V_1 = 75 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 150 \cdot 7,5 - V_2 \cdot 15 = 0, \quad V_2 = 75 \text{ kN}.$$

Diagramele de eforturi pentru transmiterea indirectă sînt desenate cu linie plină. Cu linie punctată s-au desenat diagramele ce ar rezulta dacă forța concentrată ar fi aplicată direct pe grinda principală.

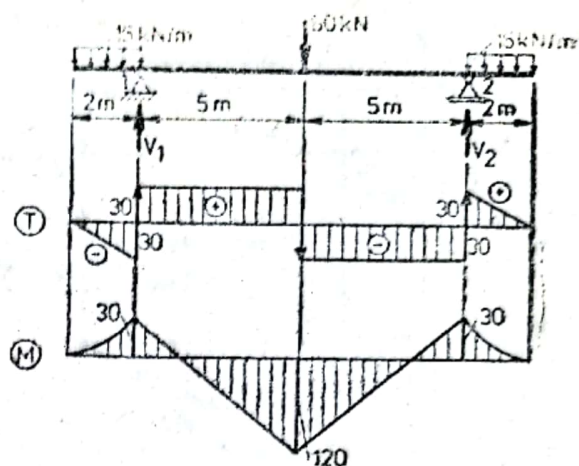


Fig. 2.24

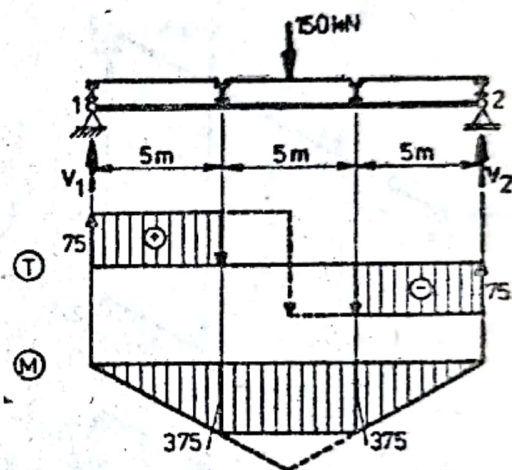


Fig. 2.25

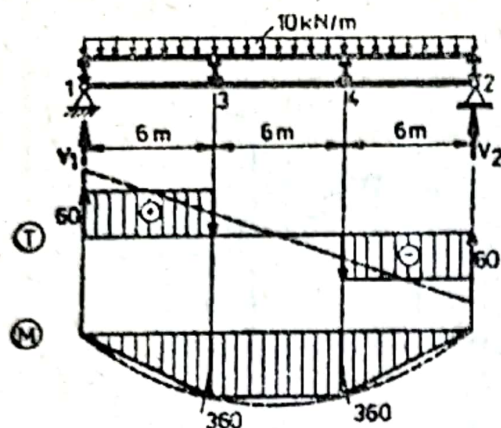


Fig. 2.26

Problema 2.26. (fig. 2.26)

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 18 - 10 \cdot 18 \cdot 9 = 0,$$

$$V_1 = 90 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 10 \cdot 18 \cdot 9 - V_2 \cdot 18 = 0,$$

$$V_2 = 90 \text{ kN}$$

Calculul eforturilor :

$$T_1 = V_1 - 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 60 \text{ kN}$$

$$M_3 = V_1 \cdot 6 - 30 \cdot 6 = 360 \text{ kNm.}$$

Problema 2.27. (fig. 2.27)

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 60 \cdot 3 + 40 \cdot 7 - V_2 \cdot 10 = 0,$$

$$V_2 = 46 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0,$$

$$V_1 \cdot 10 - 60 \cdot 7 - 40 \cdot 3 = 0,$$

$$V_1 = 54 \text{ kN.}$$

Calculul eforturilor :

În acest caz există și diagramă de forță axială.

$$N_1 = V_1 \cos 60^\circ = -27 \text{ kN}$$

$$N_3^{dr} = -V_1 \cos 60^\circ + 60 \cos 60^\circ = 3 \text{ kN}$$

$$N_4^{dr} = (-V_1 + 60 + 40) \cos 60^\circ = 23 \text{ kN}$$

$$N_2 = V_2 \cos 60^\circ = 23 \text{ kN}$$

$$T_1 = V_1 \cos 30^\circ = 46,7 \text{ kN}$$

$$T_3^{dr} = (V_1 - 60) \cos 30^\circ = -3\sqrt{3} = -5,2 \text{ kN}$$

$$T_4' = (V_1 - 60 - 40) \cos 30^\circ = -23 \sqrt{3} = -39,8 \text{ kN}$$

$$T_2 = -23 \sqrt{3} = -39,8 \text{ kN}$$

$$M_3 = V_1 \cdot 3 = 162 \text{ kNm}$$

$$M_4 = V_1 \cdot 7 + 60 \cdot 4 = 138 \text{ kNm.}$$

Problema 2.28. (fig. 2.28)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 l - pl \frac{l}{2} = 0, \quad V_1 = p \frac{l}{2}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad pl \frac{l}{2} - V_2 l = 0, \quad V_2 = p \frac{l}{2}.$$

Forța axială:

$$N_1 = -V_1 \sin \alpha = -p \frac{l}{2} \sin \alpha$$

$$N_2 = -V_1 \sin \alpha + pl \sin \alpha = p \frac{l}{2} \sin \alpha$$

Forța tăietoare:

$$T_1 = V_1 \cos \alpha = p \frac{l}{2} \cos \alpha$$

$$T_2 = (V_1 - pl) \cos \alpha = -p \frac{l}{2} \cos \alpha$$

Momentul încovoietor,

$$M_{max} = p \frac{l}{2} \frac{l}{2} - p \frac{l}{2} \frac{l}{4} = p \frac{l^2}{8}$$

Problema 2.29. (fig. 2.29)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 20 \cdot 6 \cdot 3 - R_2 d_{12} = 0,$$

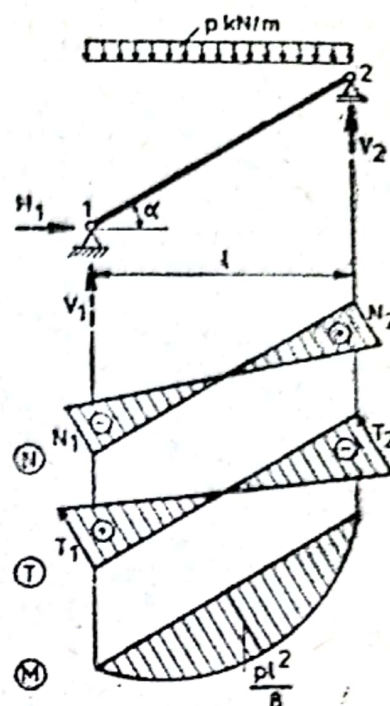


Fig. 2.28

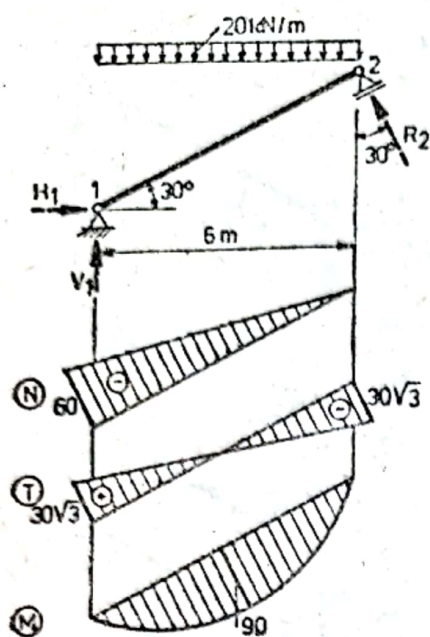


Fig. 2.29

de unde, pentru $d_{12} = \frac{6}{\cos 30^\circ} = 6,95 \text{ m}$,
rezultă

$$R_2 = 30 \sqrt{3} = 51,8 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 - R_2 \cos 60^\circ = 0,$$

$$H_1 = 25,9 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 - 20 \cdot 6 + R_2 \cos 30^\circ = 0,$$

$$V_1 = 75 \text{ kN}.$$

Calculul eforturilor:

$$N_1 = -H_1 \cos 30^\circ - V_1 \cos 60^\circ = -60 \text{ kN}$$

$$N_2 = 0$$

$$T_1 = V_1 \cos 30^\circ - N_1 \cos 60^\circ = 51,8 \text{ kN}$$

$$T_2 = -R_2 = -51,8 \text{ kN}$$

$$M_{max} = 75 \cdot 3 - 15 \sqrt{3} \cdot 3 \tan 30^\circ - 20 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 90 \text{ kNm}$$

sau

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{20 \cdot 6^2}{8} = 90 \text{ kNm}.$$

Problema 2.30. (fig. 2.30)

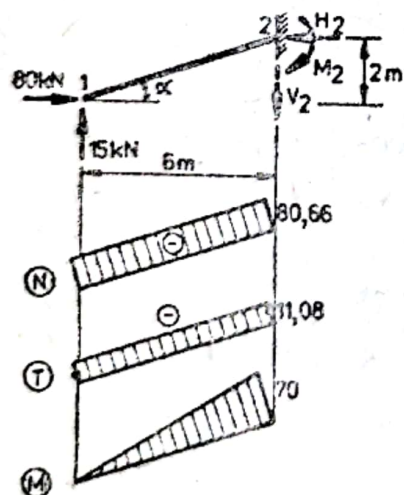


Fig. 2.30

$$\Sigma X_i = 0, \quad 80 - H_2 = 0, \quad H_2 = 80 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad 15 - V_2 = 0, \quad V_2 = 15 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad 15 \cdot 6 - 80 \cdot 2 + M_2 = 0,$$

$$M_2 = 70 \text{ kNm}$$

$$\sin \alpha = 0,316, \quad \cos \alpha = 0,949$$

$$N_1 = N_2 =$$

$$= -15 \sin \alpha - 80 \cos \alpha = -80,66 \text{ kN}$$

$$T_1 = T_2 = 15 \cos \alpha - 80 \sin \alpha = -11,08 \text{ kN}.$$

Problema 2.31. (fig. 2.31)

$$\Sigma Y_i = 0, \quad 18 - 20 \cdot 6 + V_2 = 0,$$

$$V_2 = 102 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad 18 \cdot 6 - 20 \cdot 6 \cdot 3 + M_2 = 0,$$

$$M_2 = 252 \text{ kNm}$$

$$\sin \alpha = 0,555, \quad \cos \alpha = 0,833$$

$$N_1 = -18 \sin \alpha = -10 \text{ kN}$$

$$N_2 = (-18 + 20 \cdot 6) \sin \alpha = 56,60 \text{ kN}$$

$$T_1 = 18 \cos \alpha = 15 \text{ kN}$$

$$T_2 = (18 - 20 \cdot 6) \cos \alpha = -84,95 \text{ kN}.$$

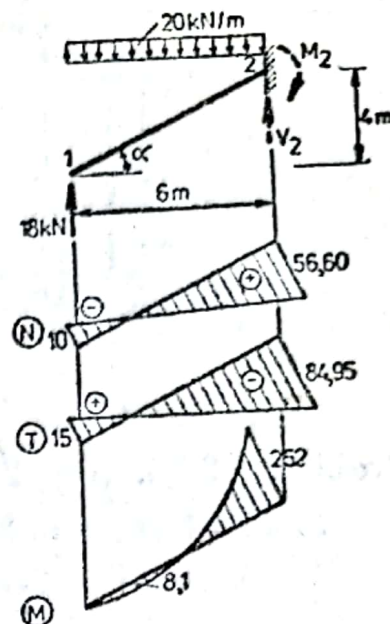


Fig. 2.31

Problema 2.32. (fig. 2.32)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 30 \cdot 2 - M_1 = 0, \quad M_1 = 60 \text{ kNm}.$$

Momentul încovoietor în secțiunile din jurul nodului 2 este de 60 kNm. Secționînd barele în apropierea nodului acesta trebuie să fie în echilibru sub acțiunea eforturilor. Din figură rezultă că această condiție este satisfăcută.

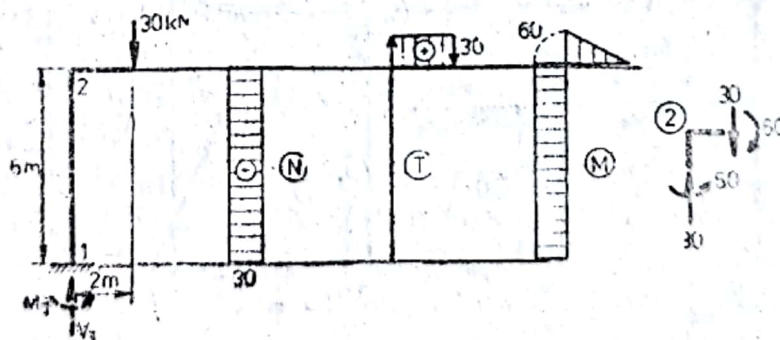


Fig. 2.32

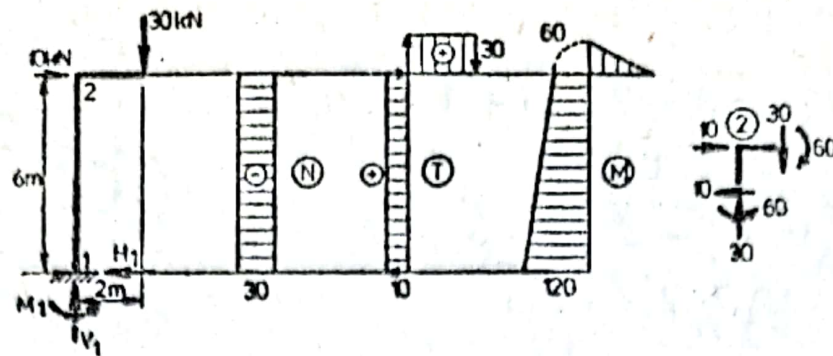


Fig. 2.33

Problema 2.33. (fig. 2.33)

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 30 \cdot 2 + 10 \cdot 6 - M_1 = 0, \quad M_1 = 120 \text{ kNm.}$$

În acest caz echilibrul nodului este asigurat de eforturile din cele două secțiuni și forța concentrată, aplicată chiar în nod.

Problema 2.34. (fig. 2.34)

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 - 15 \cdot 2 - 30 = 0, \quad V_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad M_1 - 15 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 2 - 10 \cdot 5 = 0, \quad M_1 = 20 \text{ kNm.}$$

În nodul 2 se întâlnesc trei bare. Echilibrul este asigurat de eforturile de pe toate cele trei bare.

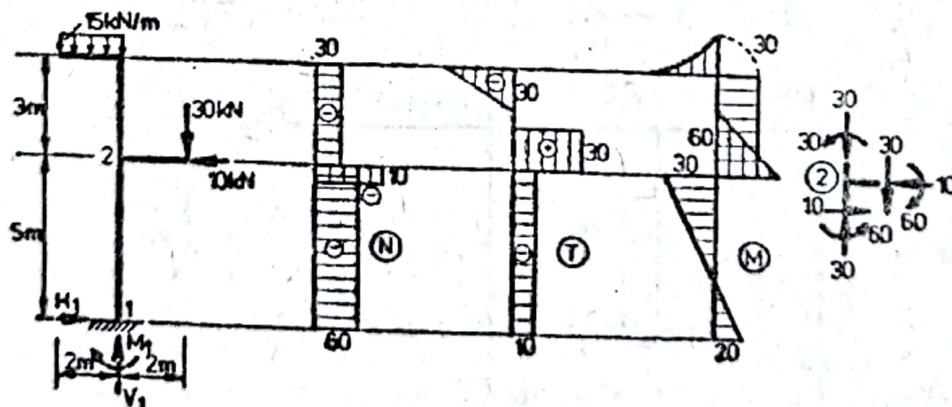


Fig. 2.34

Problema 2.35. (fig. 2.35)

Grinda dată este formată dintr-o grindă principală 1—2—3 și o grindă secundară 3—4.

Calculul reacțiunilor se începe cu grindă secundară și apoi se trece la grindă principală, care în secțiunea 3 va fi încărcată cu o forță egală și de sens contrar cu reacțiunea V_3 , obținută pe grindă 3—4. Forțele date fiind verticale se obține reacțiunea orizontală $H_1 = 0$, din condiția de echilibru pentru întregul ansamblu, iar reacțiunea $H_3 = 0$, din echilibrul grinzii 3—4.

Grindă 3—4

$$\Sigma M_3 = 0, \quad 60 \cdot 3 - V_4 \cdot 6 + 20 \cdot 9 = 0, \quad V_4 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad V_3 \cdot 6 - 60 \cdot 3 + 20 \cdot 3 = 0, \quad V_3 = 20 \text{ kN}$$

Grindă 1—2—3

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 6 - 80 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 0, \quad V_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 80 \cdot 4 - V_2 \cdot 6 + 20 \cdot 8 = 0, \quad V_2 = 80 \text{ kN}.$$

Diagramele de eforturi pe cele două grinzi componente au fost trasate mai întâi separat. Diagramele pe ansamblu se obțin prin alipirea celor două diagrame pe grinzile componente. Ele se mai pot obține și prin trasare directă, cunoscând reacțiunile din reazeme, forțele din articulația interioară și forțele exterioare.

Diagrama de forță tăietoare. În secțiunea 1 este un salt cu valoarea 20 kN, după care forța tăietoare rămâne constantă pînă în punctul de aplicație al forței de 80 kN. Aici are loc un nou salt de 80 kN, deci forța tăietoare își schimbă semnul, ajungînd la valoarea (—60) kN. În continuare rămîne constantă, iar în secțiunea 2 are loc un nou salt de 80 kN, trecînd la valoarea 20 kN. De aici T rămîne constantă, în secțiunea 3 se înregistrează un dublu salt de ± 20 kN, așa încît diagrama se continuă fără nici o modificare de valoare sau semn. Urmează un nou salt, de 60 kN, trecînd la valoarea (—40) kN, constantă, salt în secțiunea 4, de 60 kN, și se ajunge la valoarea 20 kN cu care se încheie în capătul consolei.

Diagrama de moment încovoietor. Din secțiunea 1 pînă în punctul de aplicație al forței de 80 kN momentul încovoietor variază liniar, fibra întinsă fiind cea inferioară. Panta diagramei se schimbă urmînd tot o variație liniară, pînă în secțiunea 2 unde fibra întinsă este fibra superioară ($+20 \cdot 6 - 80 \cdot 2 = -40$ kNm). Se observă că dacă se calculează momentul încovoietor pornind din dreapta, de la forța de

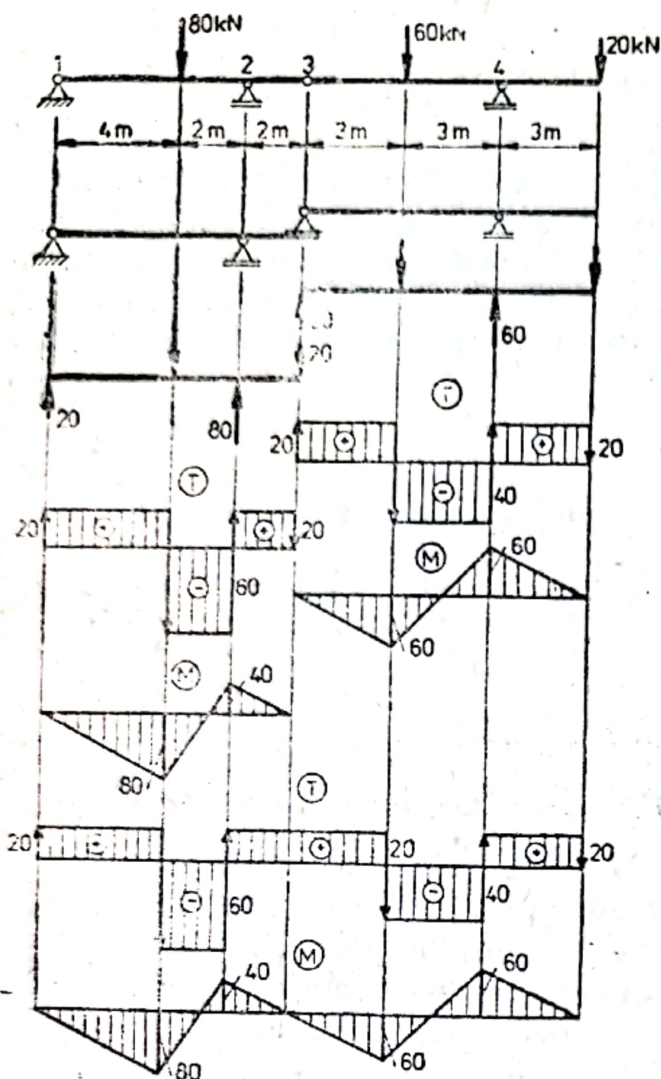


Fig. 2.35

$$\Sigma M_6 = 0, \quad -V_5 \cdot 4 + 60 \cdot 1 = 0, \quad V_5 = 15 \text{ kN}.$$

Grinda 2-3-4-5

$$\Sigma M_3 = 0, \quad -78 \cdot 2 + V_4 \cdot 6 - 15 \cdot 8 + 60 \cdot 4 = 0, \quad V_4 = 6 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad -78 \cdot 8 + V_3 \cdot 6 - 60 \cdot 2 - 15 \cdot 2 = 0, \quad V_3 = 129 \text{ kN}.$$

$$\text{Verificare; } \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 78 - 129 + 60 - 15 = 0.$$

Problema 2.37. (fig. 2.37)

Calculul reacțiunilor:

Grinda 1-2

$$V_1 = V_2 = 40 \text{ kN}$$

Grinda 5-6

$$V_5 = 20 \text{ kN}, \quad V_6 = 20 \text{ kN}$$

20 kN din secțiunea 3, se obține același rezultat, dar mai ușor de determinat.

Deoarece T nu și-a schimbat nici valoarea, nici semnul în secțiunea 3, diagrama de moment încovoietor are aceeași pantă în stînga și în dreapta secțiunii 3. Pornind din capătul consolei din dreapta se obține, în secțiunea 4, momentul încovoietor de 60 kNm, iar fibra întinsă este fibra superioară. Între punctul de aplicare al forței de 60 kN și secțiunea 4, variația fiind liniară, se unesc cele două puncte determinate anterior.

Problema 2.36. (fig. 2.36)

Grinda 1-2

$$V_1 = V_2 = 78 \text{ kN}$$

Grinda 5-6

$$\Sigma M_5 = 0,$$

$$-V_6 \cdot 4 + 60 \cdot 5 = 0,$$

$$V_6 = 75 \text{ kN}.$$

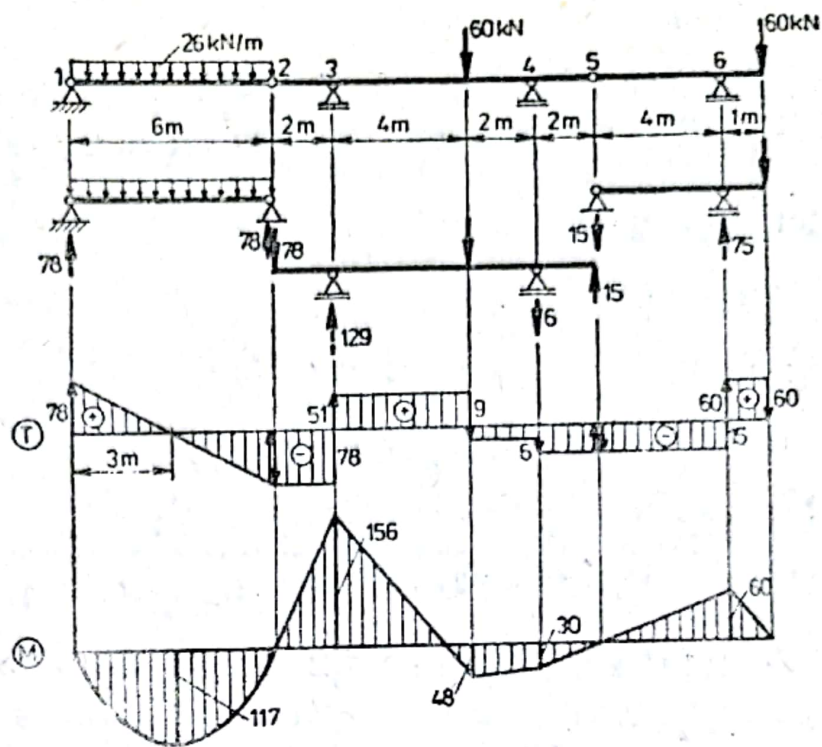


Fig. 2.36

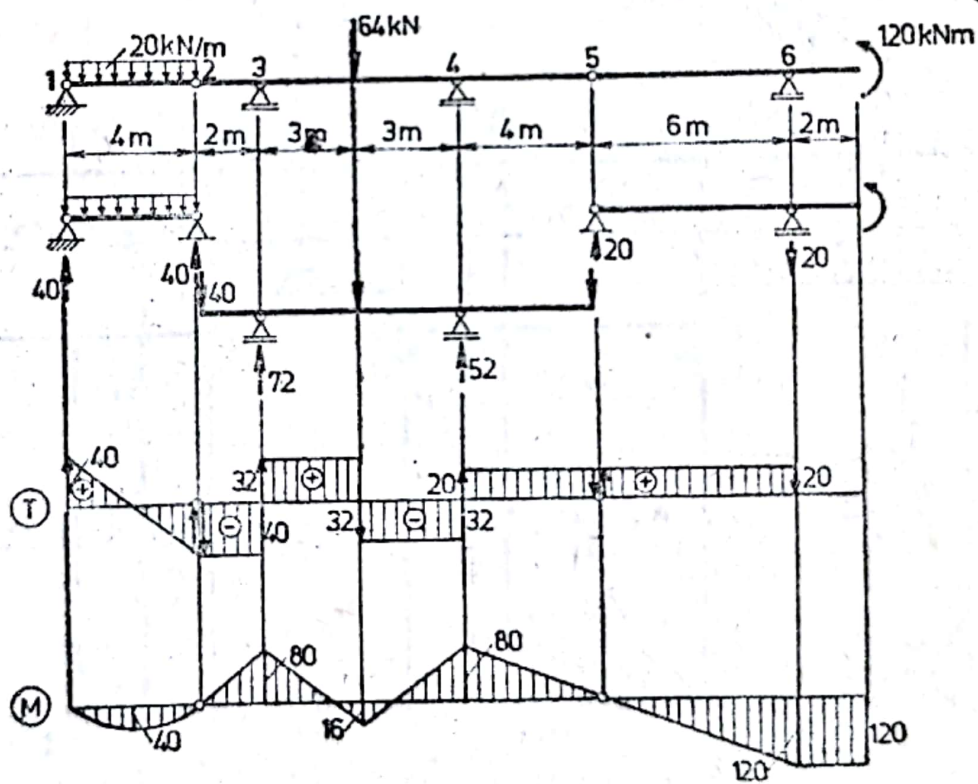


Fig. 2.37

Grinda 2-3-4-5

$$\Sigma M_3 = 0, \quad -40 \cdot 2 + 64 \cdot 3 - V_4 \cdot 6 + 20 \cdot 10 = 0, \quad V_4 = 52 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad V_3 \cdot 6 - 40 \cdot 8 - 64 \cdot 3 + 20 \cdot 4 = 0, \quad V_3 = 72 \text{ kN}.$$

Problema 2.38. (fig. 2.38)

Calculul reacțiunilor:

Grinda 5-6

$$V_5 = V_6 = 15 \text{ kN}$$

Grinda 1-2

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 6 - 30 \cdot 8 \cdot 4 = 0, \quad V_1 = 160 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 6 + 30 \cdot 8 \cdot 2 = 0, \quad V_2 = 80 \text{ kN}.$$

Grinda 6-7-8

$$\Sigma M_7 = 0, \quad -V_8 \cdot 5 + 50 \cdot 2 - 15 \cdot 2 = 0, \quad V_8 = 14 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_8 = 0, \quad V_7 \cdot 5 - 15 \cdot 7 - 50 \cdot 3 = 0, \quad V_7 = 51 \text{ kN}.$$

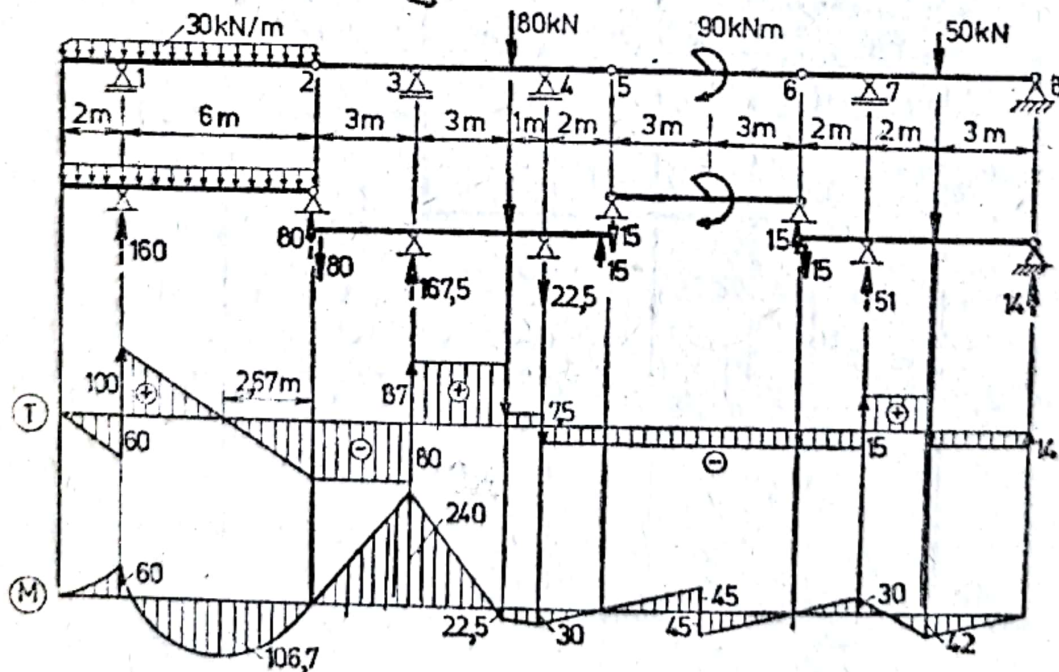


Fig. 2.38

Grinda 2-3-4-5

$$\Sigma M_3 = 0, \quad -80 \cdot 3 + V_4 \cdot 4 - 15 \cdot 6 + 80 \cdot 3 = 0, \quad V_4 = 22,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad V_3 \cdot 4 - 80 \cdot 7 - 80 \cdot 1 - 15 \cdot 2 = 0, \quad V_3 = 167,5 \text{ kN}$$

Problema 2.39. (fig. 2.39)

Grinda 3-4

$$\Sigma M_3 = 0, \quad -V_4 \cdot 4 + 20 = 0, \quad V_4 = 5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad -V_3 \cdot 4 + 20 = 0, \quad V_3 = 5 \text{ kN}$$

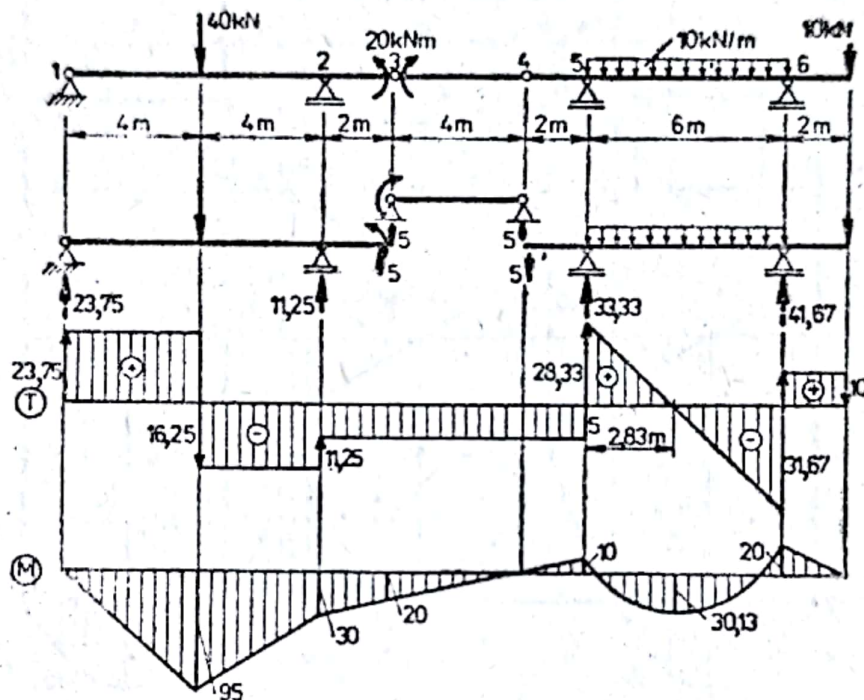


Fig. 2.39

Grinda 1-2-3

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 8 + 40 \cdot 4 - 5 \cdot 10 - 20 = 0, \quad V_2 = 11,25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 80 - 40 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 20 = 0, \quad V_1 = 23,75 \text{ kN}$$

Grinda 4-5-6

$$\Sigma M_5 = 0, \quad -5 \cdot 2 + 10 \cdot 6 \cdot 3 - V_6 \cdot 6 + 10 \cdot 8 = 0,$$

$$V_6 = 41,67 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_6 = 0, \quad 10 \cdot 2 - 10 \cdot 6 + V_5 \cdot 6 - 5 \cdot 8 = 0,$$

$$V_5 = 33,33 \text{ kN}$$

Problema 2.40 (fig. 2.40)

Calculul reacțiunilor :

Grinzile 1-2 și 5-6

$$V_1 = V_2 = 90 \text{ kN}, \quad V_5 = V_6 = 90 \text{ kN}$$

Grinda 2-3-4-5

$$V_3 = V_4 = 270 \text{ kN}$$

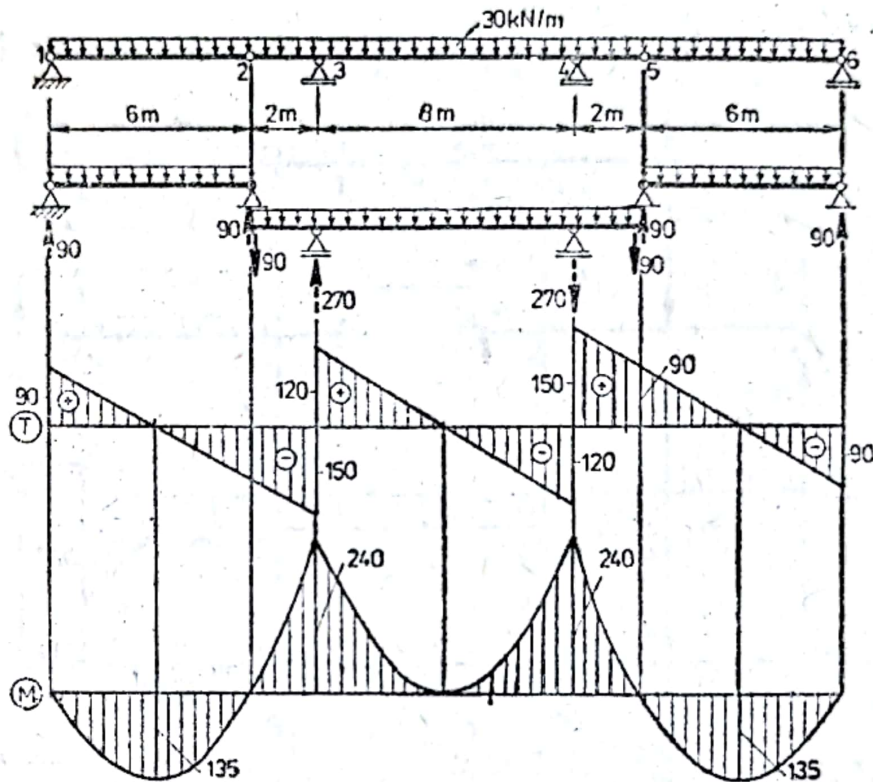


Fig. 2.40

Calculul momentelor încovoietoare :

$$M_{max}^{(1-2)} = \frac{30 \cdot 6^2}{8} = 135 \text{ kNm}, \quad M_{max}^{(5-6)} = 135 \text{ kNm}$$

$$M_3 = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 2 = 240 \text{ kNm}$$

$$M_{max}^{(3-4)} = -90 \cdot 6 + 270 \cdot 4 - 30 \cdot 6 \cdot 3 = 0.$$

Problema 2.41. (fig. 2.41)

Calculul reacțiunilor :

Grinda 4-5

$$V_4 = V_5 = 42 \text{ kN}$$

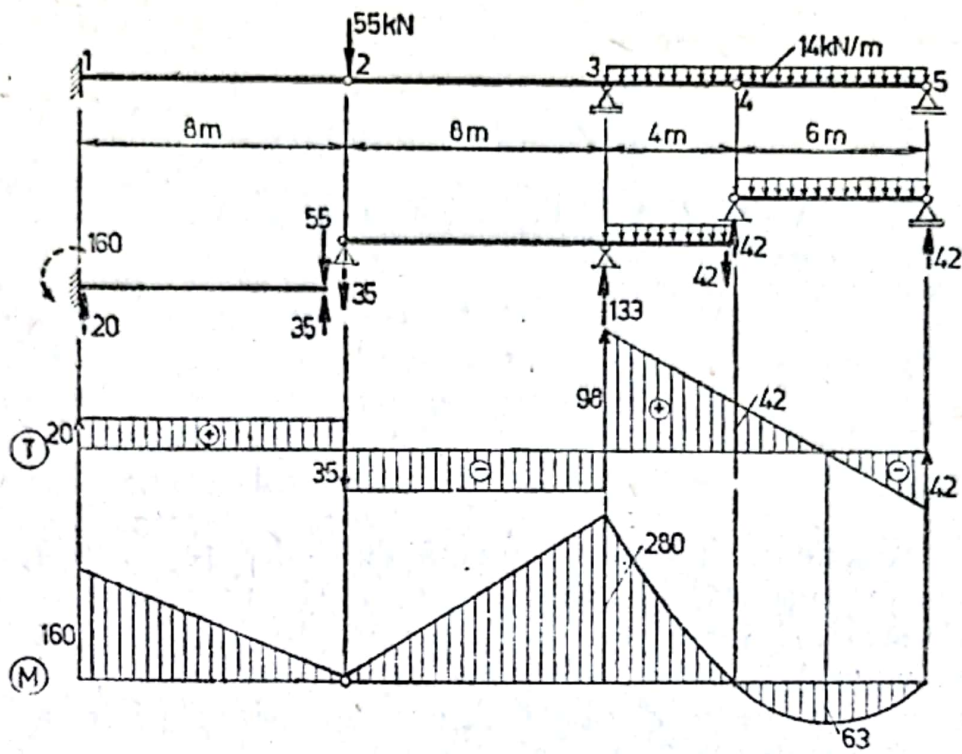


Fig. 2.41

Grinda 2-3-4

$$\Sigma M_3 = 0, \quad -V_2 \cdot 8 + 42 \cdot 4 + 14 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_2 = 35 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad -V_2 \cdot 8 + 42 \cdot 12 + 14 \cdot 4 \cdot 10 = 0, \quad V_3 = 133 \text{ kN}$$

Grinda 1-2

$$\Sigma Y_i = 0, \quad -V_1 + 55 - 31 = 0, \quad V_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 20 \cdot 8 - M_1 = 0, \quad M_1 = 160 \text{ kN.}$$

Capitolul III

CADRE STATIC DETERMINATE

Structurile de rezistență în formă de cadre reprezintă categoria de structuri cu cea mai frecventă utilizare în practică.

Cadrele static determinate sînt alcătuite din bare (drepte sau drepte și curbe) asamblate între ele rigid sau articulat și fixate față de teren cu numărul minim de legături necesar asigurării invariabilității geometrice. Punctele de legătură dintre bare se numesc noduri; deci nodurile sînt rigide sau articulate. În calcule ele sînt considerate perfect rigide sau perfect articulate, deși realitatea arată că în multe cazuri aceasta nu se realizează.

Nodul perfect rigid se caracterizează prin aceea că deplasările capetelor de bare care se întîlnesc în nod sînt egale; ca o consecință importantă rezultă că tangentele duse în nod la deformatele acestor bare păstrează între ele aceleași unghiuri, care existau în poziția inițială între axele nedeformate ale barelor (fig. III.1, a). Deformarea uneia dintre bare face ca și celelalte să se deformeze.

Nodul perfect articulat se caracterizează prin aceea că la trecerea din poziția inițială în poziția deformată, articulația permite rotirea relativă a secțiunilor de la capetele prinse în nod ale barelor. În consecință capetele de bare care se întîlnesc în nod au aceeași translație, dar unghiurile dintre tangentele duse în nod la deformatele barelor sînt diferite de cele inițiale (fig. III.1, b).

La realizarea construcțiilor se utilizează mai rar cadre static determinate. Studiul lor este însă absolut necesar deoarece, după cum se va vedea, ele sînt folosite, ca sisteme de bază, la rezolvarea, prin metoda forțelor, a cadrelor static nedeterminate.

În acest capitol se vor trata numai cadrele formate din bare drepte.

Întrucît încărcările pot fi aplicate oriunde pe structură, în general, într-o secțiune iau naștere toate cele trei eforturi: N , T , M . Rezolvarea cadrelor static determinate, din punct de vedere al calculului eforturilor, necesită două faze: determinarea reacțiunilor și

trasarea diagramelor de eforturi, cu precizarea valorilor extreme. Trasarea diagramelor se face cunoscând în prealabil reacțiunile și având în vedere modul de definire a eforturilor, ca și convențiile de semne stabilite.

Pentru verificarea exactității calculului se exprimă echilibrul nodurilor. Se izolează fiecare nod și se pun în evidență forțele exterioare aplicate lui și efectele părților înlăturate (eforturile de la capetele barelor ce se întâlnesc în acel nod). Sub acțiunea lor nodul trebuie să fie în echilibru, deci să fie satisfăcute cele trei ecuații de echilibru static.

La trasarea diagramelor de forță axială și forță tăietoare trebuie avut în vedere faptul că pentru secțiunile din imediata vecinătate a nodului aceste eforturi își modifică brusc valorile, deoarece se schimbă direcțiile axelor barelor și deci direcțiile pe care se efectuează proiecțiile. De asemenea, pentru un nod rigid în care se întâlnesc două bare, în secțiunile de lângă nod momentele încovoietoare sînt egale dar au sensuri contrare.

O particularitate deosebită prezintă rezolvarea cadrelor simetrice în raport cu o axă, simetria referindu-se atît la elementele geometrice cît și la legăturile interioare și cu baza de susținere.

Cadrelor simetrice pot fi încărcate simetric, antisimetric sau oarecum (asimetric). O încărcare oarecare se poate descompune într-o încărcare simetrică și o încărcare antisimetrică, rezultatul final obținându-se prin suprapunerea efectelor.

Particularitatea încărcării cadrelor simetrice conduce la unele posibilități de reducere a volumului de calcul, deoarece:

- la cadrele simetrice încărcate simetric, reacțiunile și diagramele N și M sînt simetrice, iar diagrama T este antisimetrică,
- la cadrele simetrice încărcate antisimetric, reacțiunile și diagramele N și M sînt antisimetrice, iar diagrama T este simetrică.

Din cele de mai sus rezultă că, dacă se determină reacțiunile și eforturile pe o jumătate de structură, pe cealaltă jumătate, aceleași mărimi statice se obțin prin transpunerea simetrică sau antisimetrică, după caz. În consecință, calculul se poate conduce pe o jumătate de structură, urmărind ca în secțiunea de pe axa de simetrie să se introducă o legătură care să aibă același efect ca și jumătatea de structură îndepărtată.

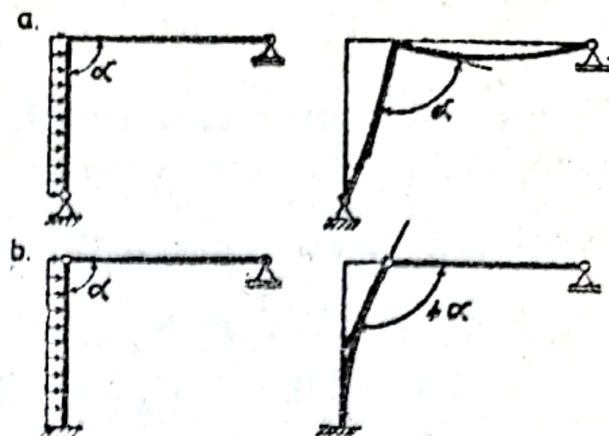


Fig. III.1

APLICAȚII

Să se traseze diagramele de eforturi, indicate în fiecare caz în parte, la cadrele următoare:

Problema 3.1. Diagramele N , T și M (fig. 3.1)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad V_2 \cdot 6 - 60 \cdot 8 = 0, \quad V_2 = 80 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 6 - 60 \cdot 8 = 0, \quad V_1 = 80 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 - 60 = 0, \quad H_1 = 60 \text{ kN.}$$

Calculul eforturilor:

$$N_{13} = -80 \text{ kN}, \quad N_{34} = -60 \text{ kN}, \quad N_{24} = 80 \text{ kN}$$

$$T_{13} = -60 \text{ kN}, \quad T_{34} = 80 \text{ kN}, \quad T_{24} = 0, \quad T_{45} = -60 \text{ kN}$$

$$M_{31} = 60 \cdot 6 = 360 \text{ kNm}, \quad M_{34} = 360 \text{ kNm}, \quad M_{45} = 60 \cdot 2 = 120 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = 60 \cdot 2 = 120 \text{ kNm.}$$

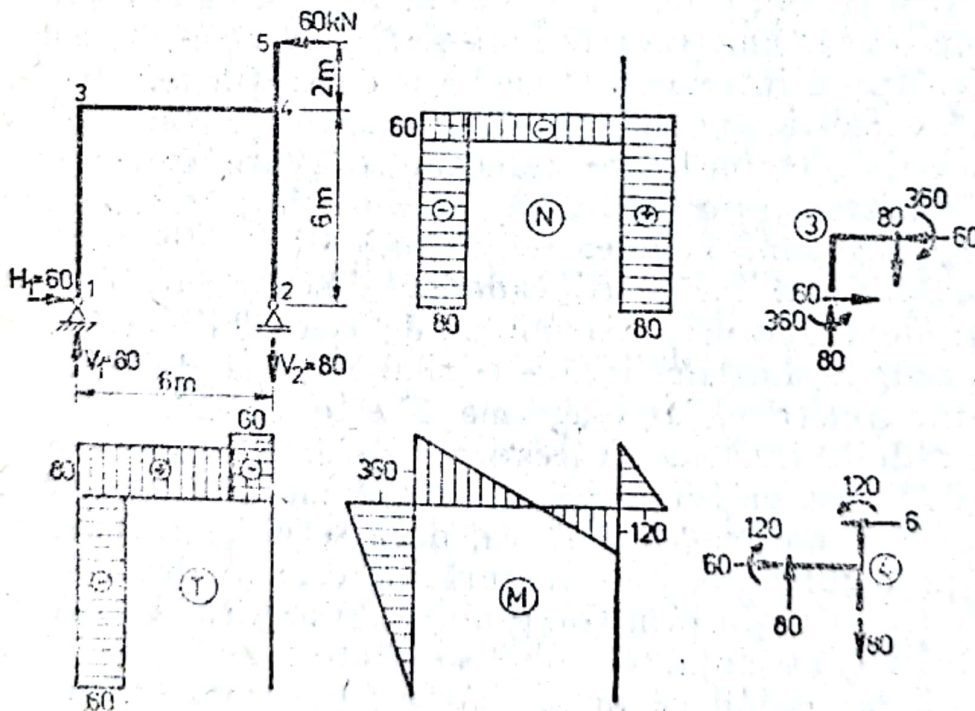


Fig. 3.1

Problema 3.2. Diagramele N , T și M (fig. 3.2)

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 9 + 12 \cdot 9 \cdot 4,5 = 0, \quad V_2 = 54 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 9 - 12 \cdot 9 \cdot 4,5 = 0, \quad V_1 = 54 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad -54 \cdot 3 + H_2 \cdot 8 + 12 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, \quad H_2 = 13,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{st} = 0, \quad 54 \cdot 6 - H_1 \cdot 8 - 12 \cdot 6 \cdot 3 = 0, \quad H_1 = 13,5 \text{ kN.}$$

Calculul eforturilor :

$$N_{14} = -54 \text{ kN}, \quad N_{25} = -54 \text{ kN}, \quad N_{45} = -13,5 \text{ kN}$$

$$T_{14} = -13,5 \text{ kN}, \quad T_{45} = 54 \text{ kN}, \quad T_{25} = 13,5 \text{ kN},$$

$$T_{54} = -54 \text{ kN}$$

$$M_{41} = -13,5 \cdot 8 = -108 \text{ kNm}, \quad M_{45} = -108 \text{ kNm},$$

$$M_{52} = -13,5 \cdot 8 = -108 \text{ kNm}, \quad M_{54} = -108 \text{ kNm}.$$

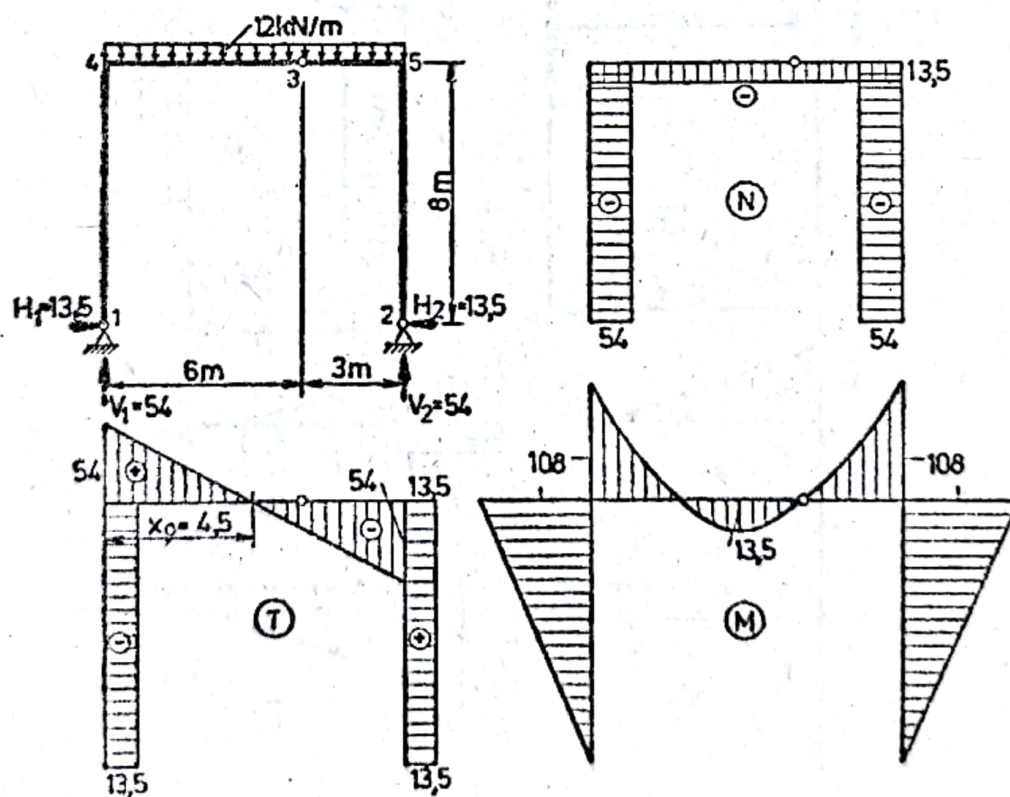


Fig. 3.2

În articulația 3 momentul încovoietor este zero. În secțiunea în care se anulează forța tăietoare ($x_0 = 4,5$ m) momentul încovoietor este maxim,

$$M_{max} = 54 \cdot 4,5 - 13,5 \cdot 8 - 12 \cdot 4,5 \cdot 2,25 = 13,5 \text{ kNm.}$$

Problema 3.3. Diagramele N , T și M (fig. 3.3)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -10V_2 + 20 \cdot 8 \cdot 4 = 0, \quad V_2 = 64 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad 10V_1 - 20 \cdot 8 \cdot 6 = 0, \quad V_1 = 96 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 = 0.$$

Calculul eforturilor:

$$N_{13} = -96 \text{ kN,}$$

$$N_{34} = -160 \text{ kN}$$

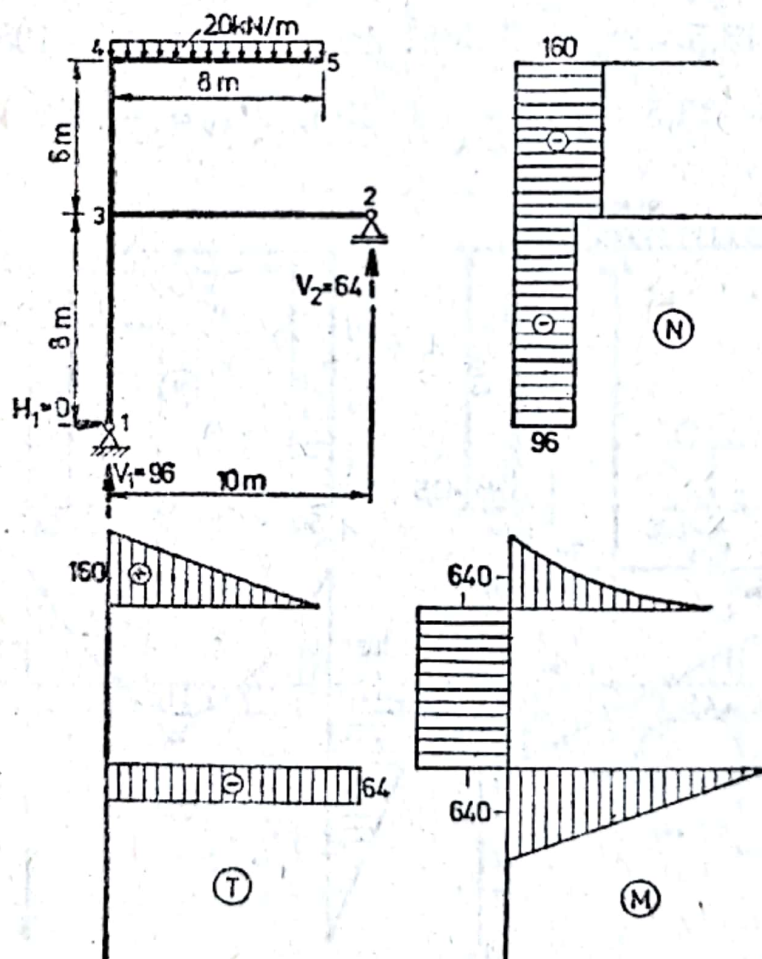


Fig. 3.3

$$T_{23} = T_{32} = -64 \text{ kN},$$

$$T_{45} = 96 + 64 = 120 \text{ kN},$$

$$M_{32} = 64 \cdot 10 = 640 \text{ kNm},$$

$$M_{34} = 640 \text{ kNm},$$

$$M_{45} = 160 \cdot 4 = 640 \text{ kNm}.$$

Problema 3.4. Diagramele N , T și M (fig. 3.4)

Reacțiunile sînt egale cu zero, deoarece forțele active se echilibrează.

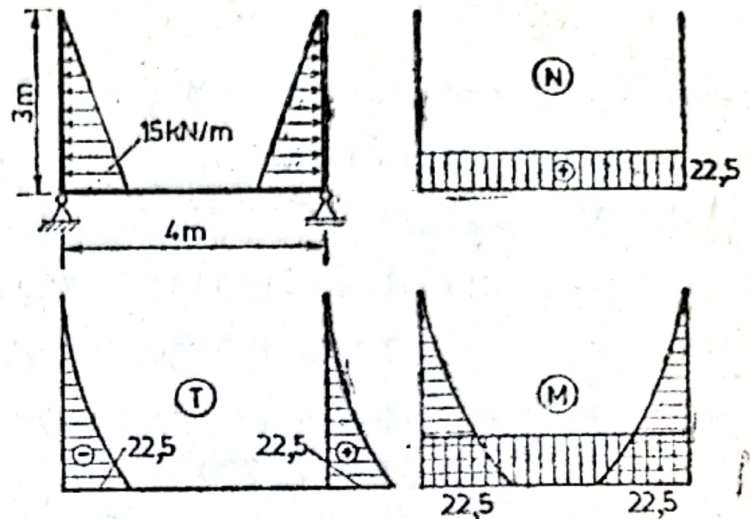


Fig. 3.4

Problema 3.5. Diagramele N , T și M (fig. 3.5)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_3^d = 0, \quad V_1 \cdot 2 - 30 \cdot 6 \cdot 3 = 0, \quad V_1 = 270 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad -270 + 90 + V_2 = 0, \quad V_2 = 180 \text{ kN}$$

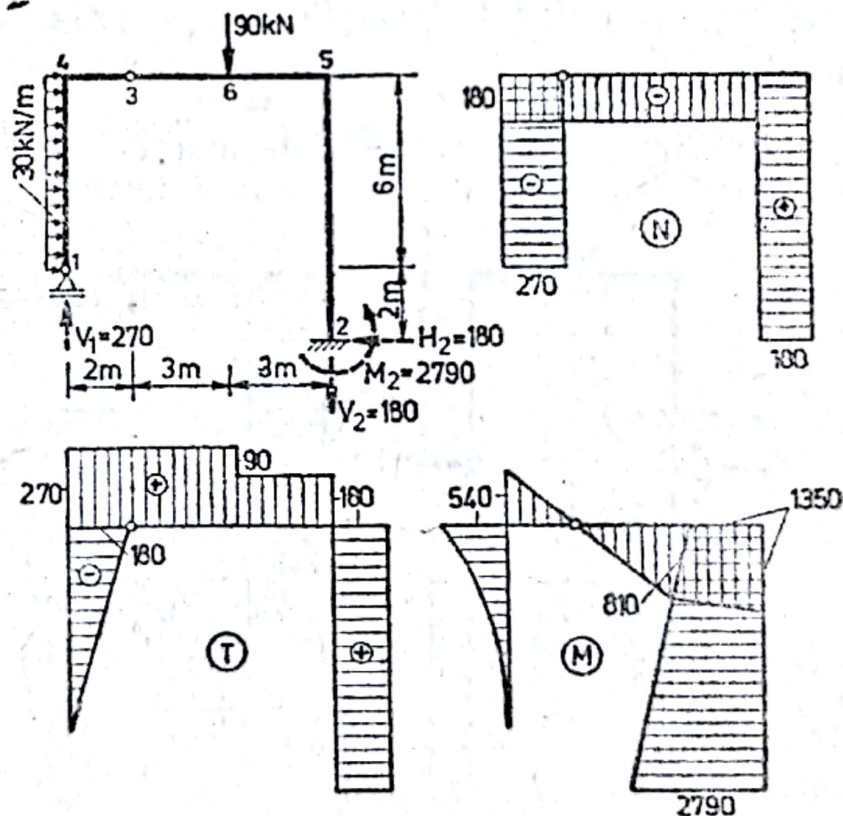


Fig. 3.5

$$\Sigma X_i = 0, \quad -H_2 + 30 \cdot 6 = 0, \quad H_2 = 180 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad 180 \cdot 6 + 180 \cdot 8 + 90 \cdot 3 - M_2 = 0, \quad M_2 = 2790 \text{ kNm.}$$

Calculul eforturilor:

$$N_{14} = -270 \text{ kN}, \quad N_{45} = -180 \text{ kN}, \quad N_{52} = 180 \text{ kN}$$

$$T_{41} = -30 \cdot 6 = -180 \text{ kN}, \quad T_{45} = 270 \text{ kN}, \quad T_{52} = 270 \text{ kN},$$

$$T_{55} = 180 \text{ kN.} \quad T_{52} = 180 \text{ kN.}$$

$$M_{41} = 30 \cdot 6 \cdot 3 = 540 \text{ kNm}, \quad M_6 = 2790 - 180 \cdot 3 - 180 \cdot 8 = 810 \text{ kNm}$$

$$M_{52} = 2790 - 180 \cdot 8 = 1350 \text{ kNm.}$$

Problema 3.6. Diagramele N , T și M (fig. 3.6)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad 20 \cdot 6 + 60 - V_2 \cdot 3 = 0, \quad V_2 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 - 60 = 0, \quad V_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 - 20 = 0, \quad H_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -60 \cdot 6 + M_1 = 0, \quad M_1 = 360 \text{ kNm.}$$

Calculul eforturilor:

$$N_{14} = 60 \text{ kN}, \quad N_{45} = -20 \text{ kN}, \quad N_{25} = -60 \text{ kN}$$

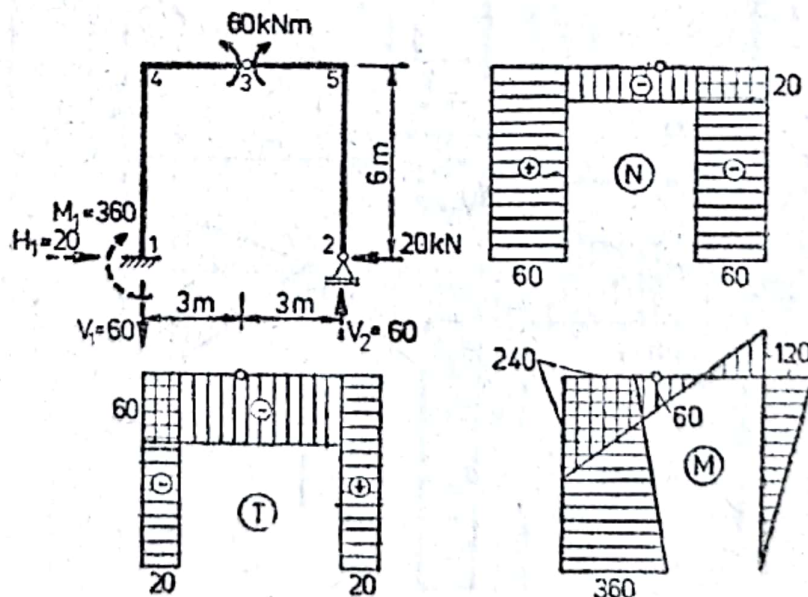


Fig. 3.6

$$T_{14} = -20 \text{ kN}, \quad T_{25} = 20 \text{ kN}, \quad T_{45} = -60 \text{ kN}$$

$$M_1 = 360 \text{ kNm}, \quad M_4 = 360 - 20 \cdot 6 = 240 \text{ kNm}, \quad M_3 = 60 \text{ kNm},$$

$$M_5 = 20 \cdot 6 = 120 \text{ kNm}.$$

În stînga și dreapta articulației 3 acționează momentele concentrate de 60 kNm.

Problema 3.7. Diagramele N , T și M (fig. 3.7)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 8 + 20 \cdot 4 \cdot 6 - 80 = 0, \quad V_2 = 50 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 8 - 80 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{st} = 0, \quad 30 \cdot 4 - H_1 \cdot 5 - 80 = 0, \quad H_1 = 8 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0 \quad 8 - H_2 = 0, \quad H_2 = 8 \text{ kN}.$$

Calculul eforturilor:

$$N_{14} = -30 \text{ kN}, \quad N_{15} = 8 \text{ kN}, \quad N_{52} = -50 \text{ kN}$$

$$T_{14} = -8 \text{ kN}, \quad T_{43} = 30 \text{ kN}, \quad T_{53} = -50 \text{ kN}, \quad T_{25} = 8 \text{ kN}$$

$$M_{41} = 8 \cdot 5 = 40 \text{ kNm}, \quad M_{46} = 80 \text{ kNm}, \quad M_{43} = 40 + 80 = 120 \text{ kNm},$$

$$M_{53} = 8 \cdot 5 = 40 \text{ kNm}.$$

În articulația 3 momentul încovoietor este zero; pe intervalul 3—5 variația momentului încovoietor este parabolică.

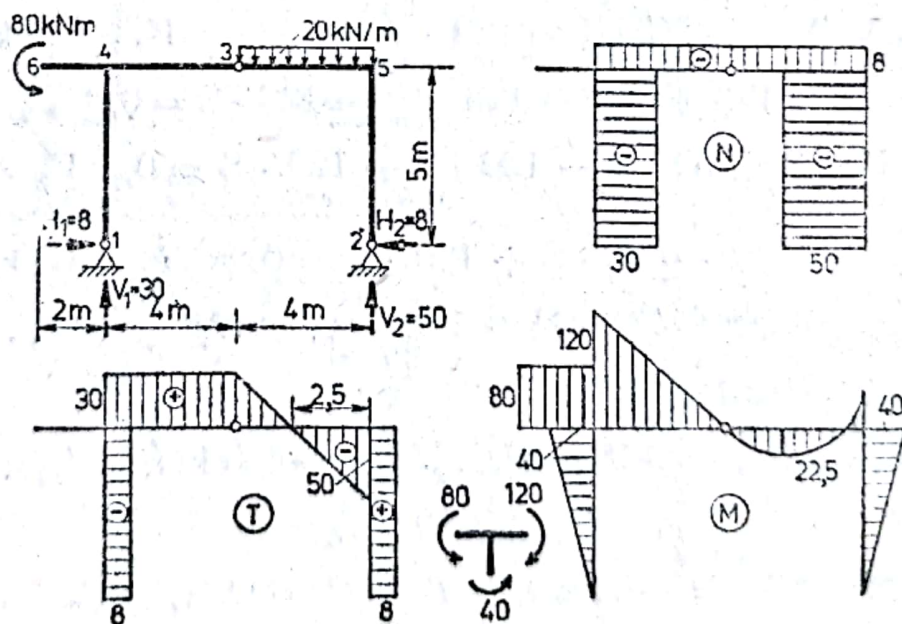


Fig. 3.7.

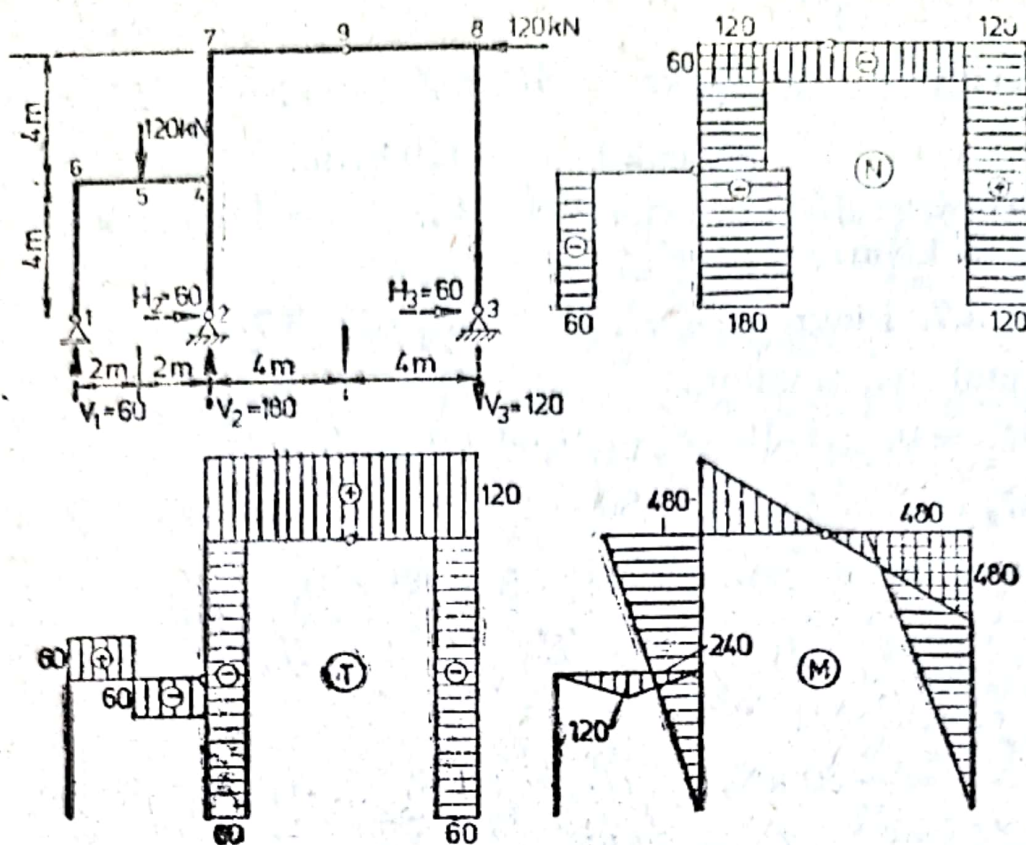


Fig. 3.8

Problema 3.8. Diagramele N , T și M (fig. 3.8)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_4^{st} = 0, \quad V_1 \cdot 4 - 120 \cdot 2 = 0, \quad V_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3 = 0, \quad 60 \cdot 12 + V_2 \cdot 8 - 120 \cdot 10 - 120 \cdot 8 = 0, \quad V_2 = 180 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_3 \cdot 8 + 60 \cdot 4 - 120 \cdot 2 - 120 \cdot 8 = 0, \quad V_3 = 120 \text{ kN.}$$

$$\Sigma M_5^{dr} = 0, \quad -H_3 \cdot 8 + 120 \cdot 4 = 0, \quad H_3 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_4 = 0, \quad H_2 + 60 - 120 = 0, \quad H_2 = 60 \text{ kN.}$$

Calculul eforturilor:

$$N_{16} = -60 \text{ kN}, \quad N_{24} = -180 \text{ kN}, \quad N_{47} = -120 \text{ kN}, \quad N_{78} = -60 \text{ kN}$$

$$N_{38} = 120 \text{ kN},$$

$$T_{64} = 60 \text{ kN}, \quad T_{46} = -60 \text{ kN}, \quad T_{27} = -60 \text{ kN}, \quad T_{78} = 180 \text{ kN},$$

$$T_{38} = -60 \text{ kN},$$

$$M_5 = 602 = 120 \text{ kNm},$$

$$M_{72} = 60 \cdot 8 = 480 \text{ kNm},$$

$$M_4 = 60 \cdot 4 = 240 \text{ kNm},$$

$$M_{83} = 608 = 480 \text{ kNm}.$$

În secțiunea 4, pe stîlp, are loc un salt numai în diagrama de forță axială. În celelalte diagrame nu au loc schimbări de valori sau pante, deoarece pe partea secundară 1—4 nu există forțe orizontale.

Problema 3.9. Diagramele N , T și M (fig. 3.9)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_4^s = 0, \quad V_1 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_1 = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3 = 0, \quad V_2 \cdot 8 - 20 \cdot 4 \cdot 12 + 40 \cdot 14 - 40 \cdot 8 \cdot 4 = 0,$$

$$V_2 = 210 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_3 \cdot 8 + 40 \cdot 6 - 20 \cdot 4 \cdot 4 - 40 \cdot 8 \cdot 4 = 0,$$

$$V_3 = 170 \text{ kN}$$

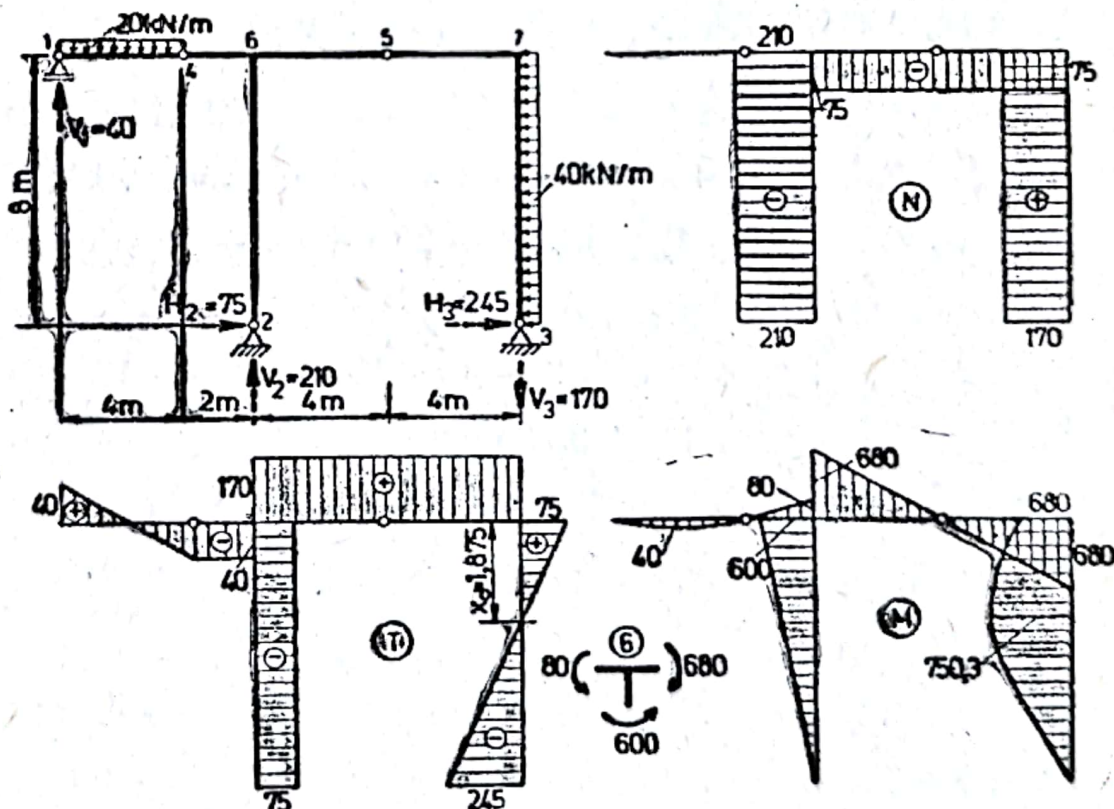


Fig. 3.9

$$\Sigma M_5^{st} = 0, \quad 170 \cdot 4 - H_3 \cdot 8 - 40 \cdot 8 \cdot 4 = 0, \quad H_3 = 245 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_2 + 245 - 40 \cdot 8 = 0, \quad H_2 = 75 \text{ kN.}$$

Verificare :

$$\Sigma M_5^{st} = 0, \quad \Sigma M_5^{st} = 40 \cdot 10 - 20 \cdot 4 \cdot 8 + 210 \cdot 4 - 75 \cdot 8 = 0.$$

Calculul eforturilor :

$$N_{26} = -210 \text{ kN}, \quad N_{67} = -75 \text{ kN}, \quad N_{37} = 170 \text{ kN}$$

$$T_1 = 40 \text{ kN}, \quad T_{46} = -40 \text{ kN}, \quad T_{26} = -75 \text{ kN}, \quad T_{67} = 170 \text{ kN},$$

$$T_{73} = 75 \text{ kN}, \quad T_{37} = -245 \text{ kN},$$

$$M_{64} = 46 \cdot 6 - 20 \cdot 4 \cdot 4 = 80 \text{ kNm}, \quad M_{62} = 75 \cdot 8 = 600 \text{ kNm},$$

$$M_{65} = 80 + 600 = 680 \text{ kNm}, \quad M_{73} = 245 \cdot 8 - 40 \cdot 8 \cdot 4 = 680 \text{ kNm}.$$

Momentul încovoietor maxim pe stîlpul 3-7 este

$$M_{max} = 245 \cdot 6,125 - 40 \cdot 6,125 \frac{6,125}{2} = 750,31 \text{ kNm}.$$

Problema 3.10. Diagramele N , T și M (fig. 3.10)

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma M_4^{st} = 0, \quad V_1 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_1 = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad -V_3 \cdot 6 + 60 \cdot 8 - 20 \cdot 4 \cdot 4 + 40 \cdot 6 = 0,$$

$$V_3 = 66,67 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3 = 0, \quad V_2 \cdot 6 + 60 \cdot 2 + 40 \cdot 12 - 20 \cdot 4 \cdot 10 = 0,$$

$$V_2 = 33,33 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_5^{dr} = 0, \quad -66,67 \cdot 2 + 140 + 60 \cdot 4 - H_3 \cdot 6 = 0,$$

$$H_2 = 41,10 \text{ kN}.$$

Calculul eforturilor :

$$N_{26} = -33,33 \text{ kN}, \quad N_{37} = -66,67 \text{ kN}, \quad N_{67} = 41,10 \text{ kN},$$

$$T_1 = 40 \text{ kN}, \quad T_{46} = -40 \text{ kN}, \quad T_{64} = -40 \text{ kN}, \quad T_{67} = -6,67 \text{ kN},$$

$$T_{78} = 60 \text{ kN}, \quad T_{26} = 41,10 \text{ kN}, \quad T_{37} = -41,10 \text{ kN},$$

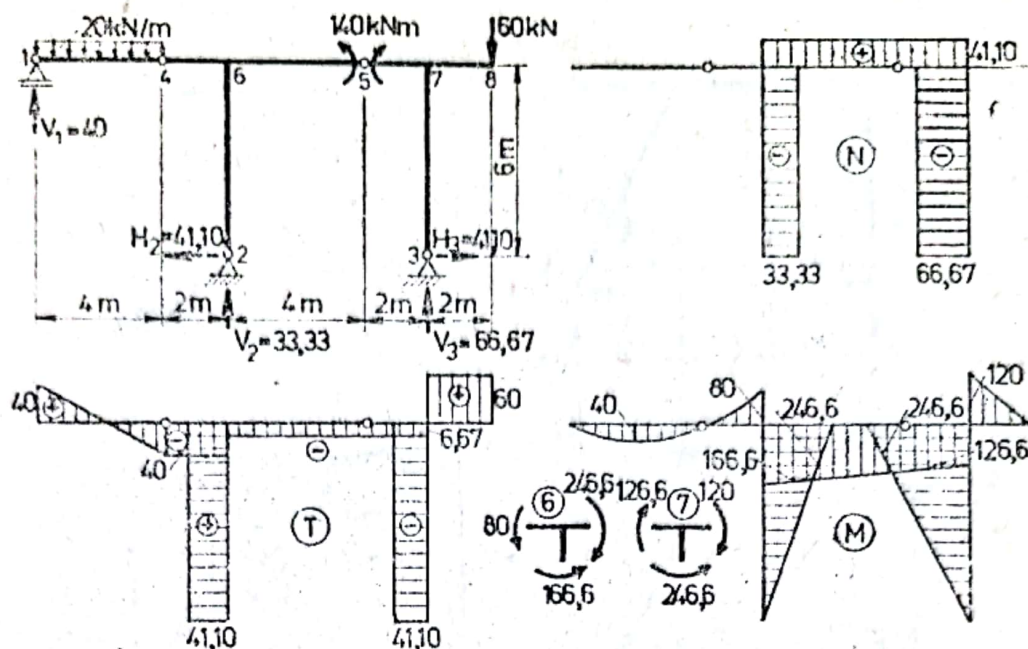


Fig. 3.10

$$M_{64} = 40 \cdot 6 - 20 \cdot 4 \cdot 4 = -80 \text{ kNm}, \quad M_{62} = 41,1 \cdot 6 = 246,6 \text{ kNm},$$

$$M_{65} = -60 + 246,6 = 186,6 \text{ kNm}, \quad M_{78} = 60 \cdot 2 = 120 \text{ kNm},$$

$$M_{78} = 41,1 \cdot 6 = 246,6 \text{ kNm}, \quad M_{75} = -120 + 246,6 = 126,6 \text{ kNm}$$

Problema 3.11. Diagramele N , T și M (fig. 3.11)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 9 - 180 = 0, \quad V_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + V_2 - 40 = 0, \quad V_2 = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3' = 0, \quad V_1 \cdot 3 - 180 + H_1 \cdot 6 = 0, \quad H_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 - H_2 = 0, \quad H_2 = 20 \text{ kN}.$$

Calculul eforturilor:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$N_{25} = -V_2 \cos \alpha + H_2 \sin \alpha = -\frac{20}{\sqrt{5}} = -8,94 \text{ kN},$$

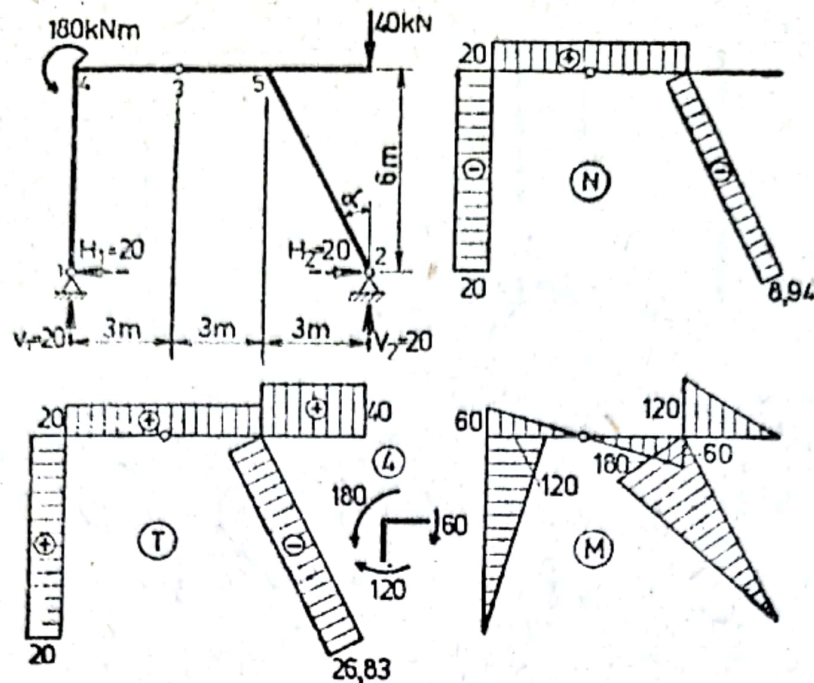


Fig. 3.11

$$T_{25} = -H_2 \cos \alpha - V_2 \sin \alpha = -\frac{60}{\sqrt{5}} = -26,83 \text{ kN},$$

$$M_{52} = 20 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 180 \text{ kNm}.$$

Problema 3.12. Diagramele N , T și M (fig. 3.12)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad -V_1 \cdot 4 + 80 \cdot 6 + 40 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_2 = 200 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -200 \cdot 8 - 80 \cdot 2 + 40 \cdot 4 \cdot 6 + 160 \cdot 8 + 20 \cdot 8 \cdot 4 - \\ - M_1 = 0, \quad M_1 = 1120 \text{ kNm}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad 20 \cdot 8 + 160 - 80 - H_1 = 0, \quad H_1 = 240 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{st} = 0, \quad -V_1 \cdot 4 - 20 \cdot 8 \cdot 4 - 1120 + 240 \cdot 8 = 0,$$

$$V_1 = 40 \text{ kN}.$$

Verificare;

$$\Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 40 + 40 \cdot 4 - 200 = 0.$$

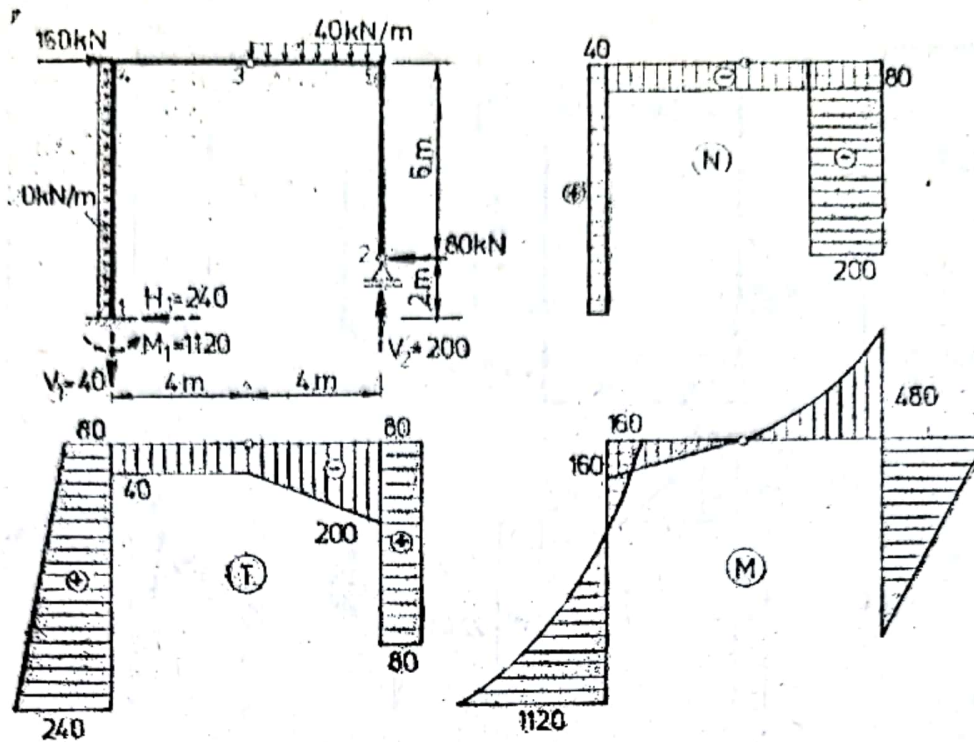


Fig. 3.12

Calculul eforturilor:

$$N_{14} = 40 \text{ kN}, \quad N_{45} = 240 - 20 \cdot 8 - 160 = -80 \text{ kN},$$

$$N_{52} = -200 \text{ kN},$$

$$T_{14} = 240 \text{ kN}, \quad T_{43} = -40 \text{ kN}, \quad T_{53} = -40 - 40 \cdot 4 = -200 \text{ kN},$$

$$T_{25} = 80 \text{ kN},$$

$$M_1 = -1120 \text{ kNm}, \quad M_{41} = -1120 - 20 \cdot 8 \cdot 4 + 240 \cdot 8 = 160 \text{ kNm},$$

$$M_{52} = 80 \cdot 6 = 480 \text{ kNm}.$$

Problema 3.13. Diagramele N , T și M (fig. 3.13)

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_5^{dir} = 0, \quad -V_3 \cdot 4 + 10 \cdot 6 + 30 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \quad V_3 = 75 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 8 + 30 \cdot 4 \cdot 4 - 60 \cdot 6 - 75 \cdot 6 = 0,$$

$$V_1 = 41,25 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 8 - 75 \cdot 14 + 60 \cdot 2 + 30 \cdot 4 \cdot 12 = 0,$$

$$V_2 = 63,75 \text{ kN}$$

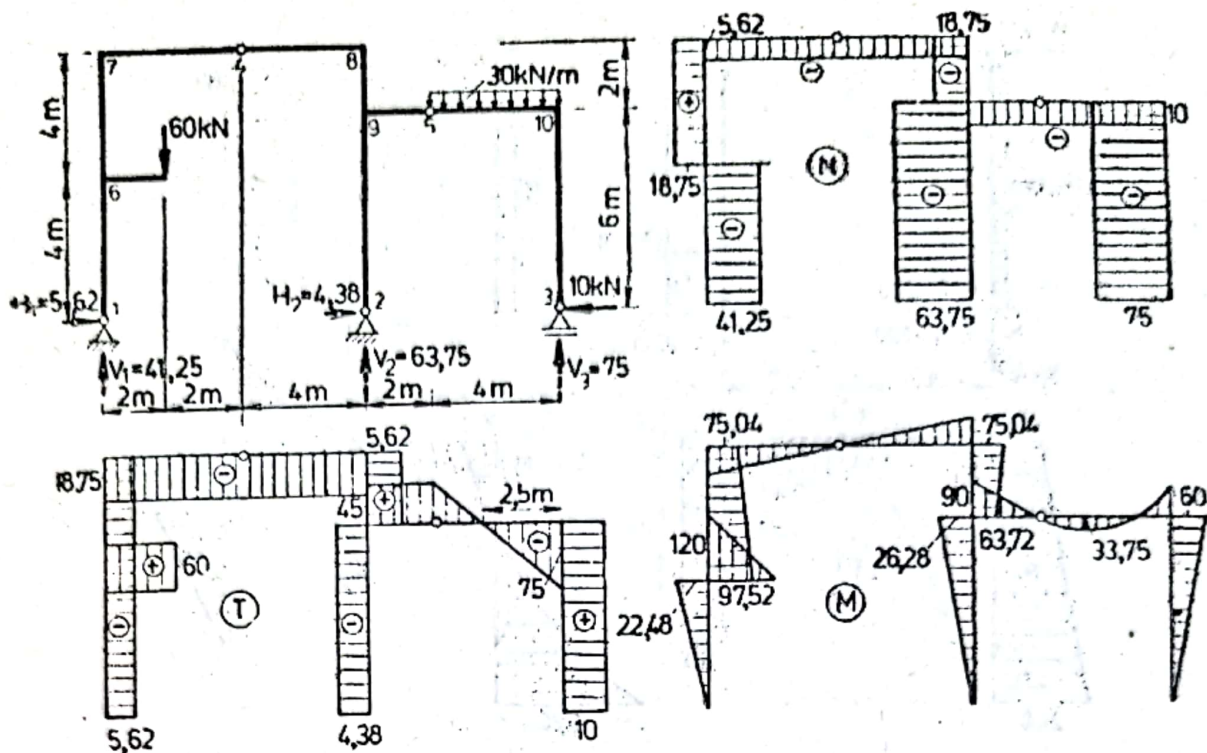


Fig. 3.13

$$\Sigma M_4^{st} = 0, \quad 41,25 \cdot 4 - 60 \cdot 2 - H_1 \cdot 8 = 0, \quad H_1 = 5,62 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad 5,62 + H_2 - 10 = 0, \quad H_2 = 4,38 \text{ kN.}$$

Verificare;

$$\Sigma M_5^{st} = 0, \quad \Sigma M_5^{st} = 63,75 \cdot 2 - 4,38 \cdot 6 - 60 \cdot 8 - 5,62 \cdot 6 + 41,25 \cdot 10 = 0.$$

Problema 3.14. Diagramele N , T și M (fig. 3.14)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 20 - 25 \cdot 20 - 10 \cdot 10 \cdot 5 = 0, \quad V_1 = 50 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 10 \cdot 10 \cdot 15 - V_2 \cdot 20 = 0, \quad V_2 = 75 \text{ kN.}$$

$$\Sigma M_3^{st} = 0, \quad V_1 \cdot 10 - 25 \cdot 10 - H_1 \cdot 60 = 0, \quad H_1 = 41,67 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 - H_2 = 0, \quad H_2 = 41,67 \text{ kN.}$$

Calculul eforturilor:

$$N_{14} = -V_1 \sin \alpha - H_1 \cos \alpha = -64,82 \text{ kN}$$

$$N_{25} = -V_2 \sin \alpha - H_2 \cos \alpha = -82,50 \text{ kN}$$

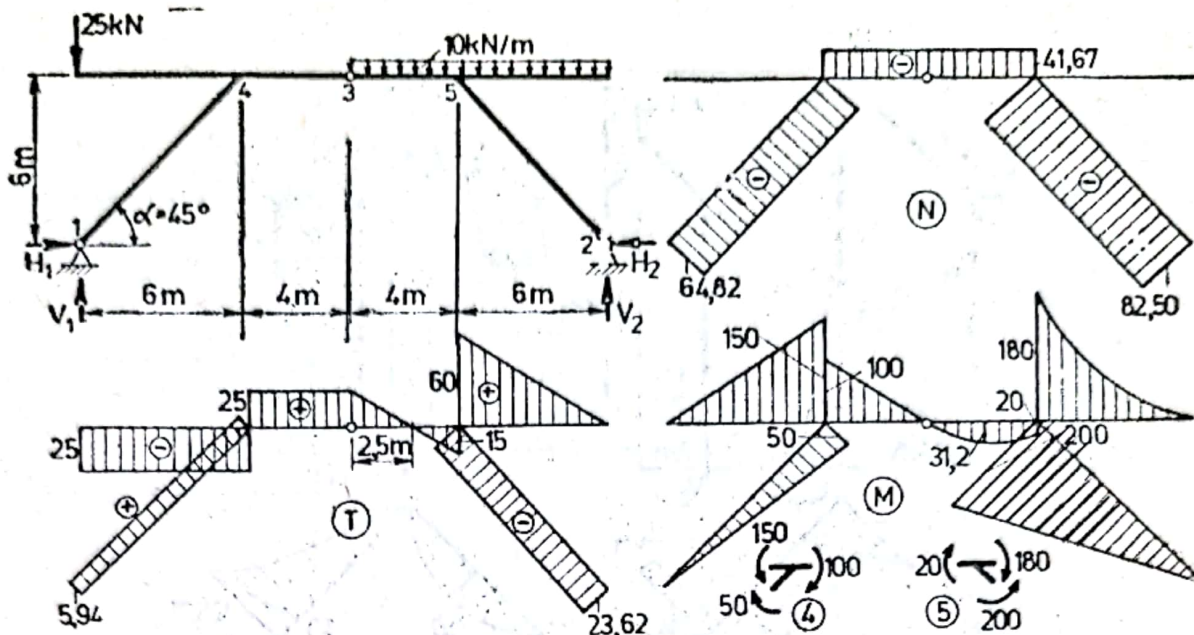


Fig. 3.14

$$T_{14} = V_1 \cos \alpha - H_1 \sin \alpha = 5,94 \text{ kN}$$

$$T_{25} = H_2 \sin \alpha - V_2 \cos \alpha = -23,52 \text{ kN}$$

$$M_{41} = V_1 \cdot 6 - H_1 \cdot 6 = 50 \text{ kNm.}$$

Problema 3.15. Diagramele N , T și M (fig. 3.15)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 - H_2 = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 - 30 \cdot 4 + V_2 - 20 = 0$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 8 + H_1 \cdot 6 - 30 \cdot 4 \cdot 6 + 20 \cdot 2 = 0$$

$$\Sigma M_3^{st} = 0, \quad V_1 \cdot 4 - H_1 \cdot 4 - 30 \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

Rezolvând ecuațiile rezultă: $H_1 = H_2 = 14,29 \text{ kN}$, $V_1 = 74,29 \text{ kN}$, $V_2 = 65,71 \text{ kN}$.

Calculul eforturilor:

$$\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_{13} = - \left(V_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -62,63 \text{ kN}$$

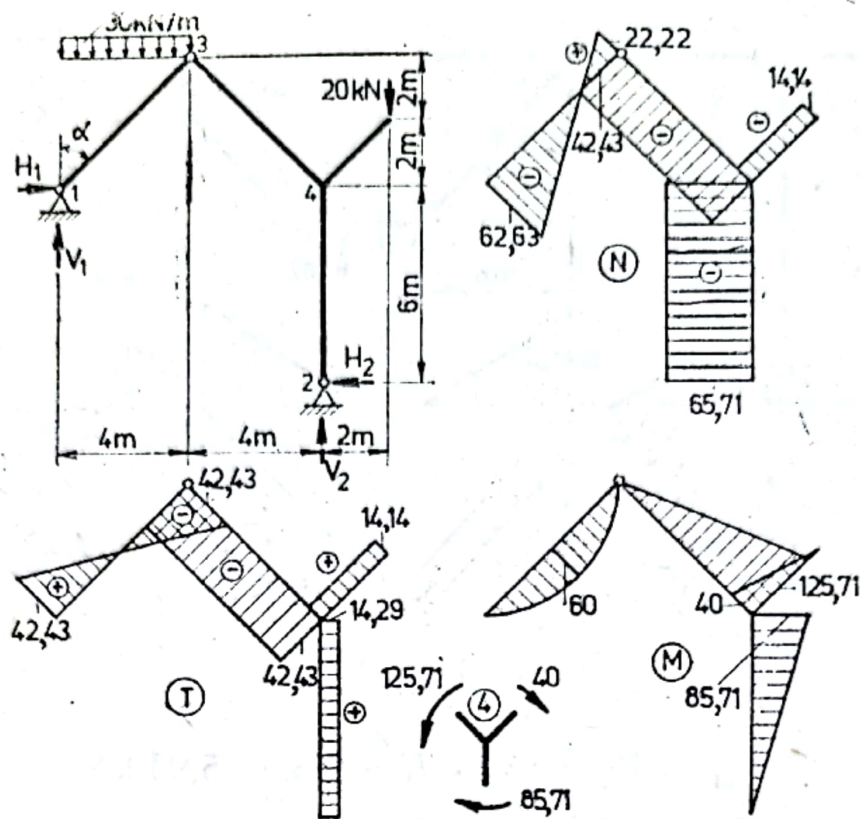


Fig. 3.15

$$N_{31} = -62,63 + 30 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 22,22 \text{ kN}$$

$$N_{34} = V_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 30 \cdot 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -42,43 \text{ kN}$$

$$T_{13} = V_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 42,43 \text{ kN}, \quad T_{31} = 42,43 - 30 \cdot 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -42,43 \text{ kN}$$

$$T_{34} = V_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + H_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 30 \cdot 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -22,22 \text{ kN}.$$

Problema 3.16. Diagramele N , T și M (fig. 3.16)

Calculul reacțiunilor se efectuează obișnuit, ca pentru o grindă simplu rezemată, avînd ca rezemări o articulație și un reazem simplu.

$$\Sigma M_2 = 0, \quad -V_1 \cdot 8 + 20 \cdot 4 = 0, \quad V_1 = 10 \text{ kN}$$

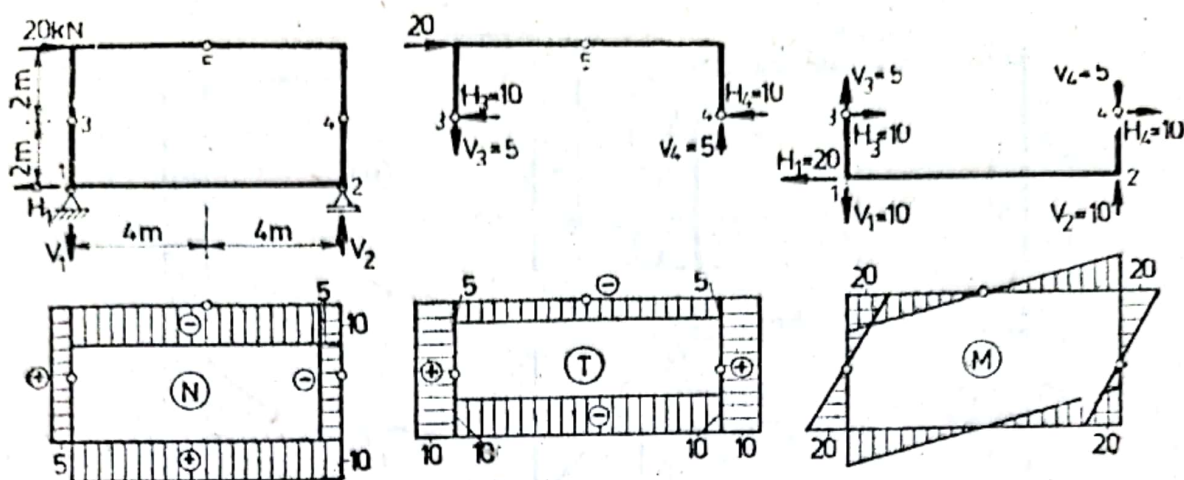


Fig. 3.16

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_1 \cdot 8 + 20 \cdot 4 = 0, \quad V_2 = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad -H_1 + 20 = 0, \quad H_1 = 20 \text{ kN.}$$

Pentru calculul eforturilor se separă sistemele 354 și 1234 și se determină reacțiunile din articulațiile interioare 3 și 4.

$$\Sigma M_3 = 0, \quad -V_4 \cdot 8 + 20 \cdot 2 = 0, \quad V_4 = 5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_4 = 0, \quad -V_3 \cdot 8 + 20 \cdot 2 = 0, \quad V_3 = 5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_5^{st} = 0, \quad -5 \cdot 4 + H_3 \cdot 2 = 0, \quad H_3 = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_5^{dr} = 0, \quad -5 \cdot 4 + H_4 \cdot 2 = 0, \quad H_4 = 10 \text{ kN.}$$

Cu reacțiunile astfel calculate s-au trasat diagramele de eforturi.

Problema 3.17. Diagramele N , T și M (fig. 3.17)

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 10 + 10 \cdot 10 \cdot 5 + 60 \cdot 3 - 60 \cdot 3 = 0,$$

$$V_2 = 50 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 10 - 10 \cdot 10 \cdot 5 + 60 \cdot 3 - 60 \cdot 3 = 0,$$

$$V_1 = 50 \text{ kN}$$

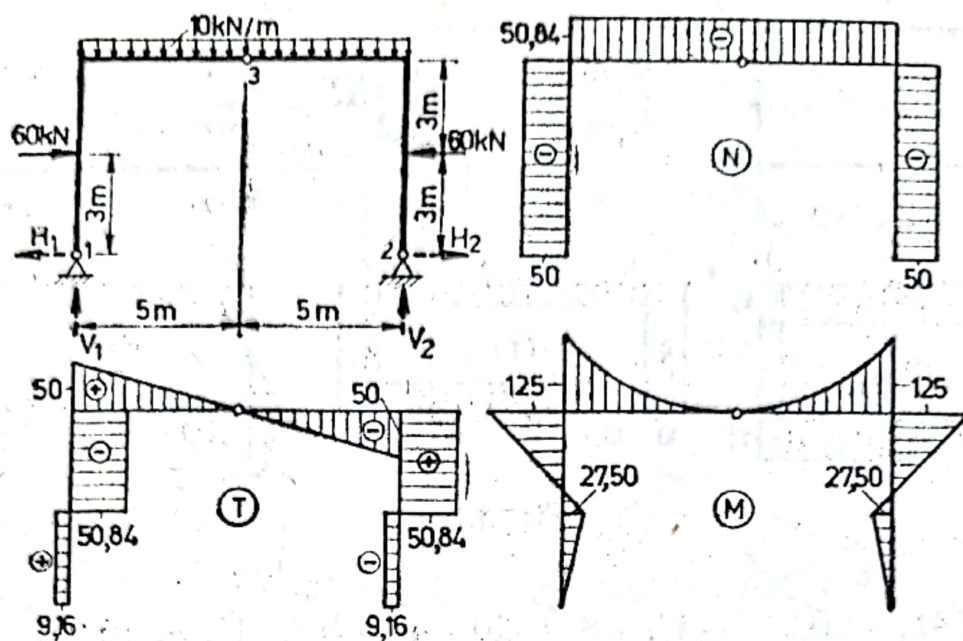


Fig. 3.17

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad -50 \cdot 5 - H_2 \cdot 6 + 60 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0,$$

$$H_2 = 9,16 \text{ kN.}$$

Încărcarea cadrului simetric fiind simetrică, reacțiunile și diagramele N și M au rezultat simetrice, iar diagrama T a rezultat antisimetrică.

Capitolul IV

STRUCTURI ARTICULATE

A. STRUCTURI ARTICULATE PLANE

Structurile articulate plane cunoscute sub numele de grinzi cu zăbrele plane, sînt definite ca ansambluri de bare legate între ele în noduri prin articulații, astfel încît să formeze sisteme invariabile din punct de vedere geometric.

Schematizarea acestor structuri are la bază următoarele ipoteze simplificatoare specifice:

- axele barelor sînt concurente în noduri,
- nodurile sînt articulații perfecte, barele rezultînd dublu articulate,
- forțele exterioare se aplică numai în noduri.

Ca urmare a acestor ipoteze, în bare apar numai eforturi axiale, ceea ce conduce la concluzia că fiecare bară a grinzii cu zăbrele introduce o singură necunoscută, din punct de vedere static.

În realitate, în barele structurii se dezvoltă forțe axiale — dominante — precum și momente încovoietoare și forțe tăietoare — secundare —, ca urmare mai ales a nerealizării articulațiilor perfecte în noduri. Ca atare soluționarea completă a problemei presupune determinarea tuturor acestor eforturi. De obicei, în proiectare calculul se rezumă la aflarea forțelor axiale, pe baza acceptării celor trei ipoteze enunțate, urmînd ca apoi să se facă anumite corecții în cadrul operației de dimensionare. Pentru structuri importante, supuse acțiunii unor încărcări puternice sau pentru elemente ce se execută în serie (unde se impune o dimensionare riguroasă) este absolut necesar să se țină seama de rigiditățile nodurilor. În această situație structura devine multiplu static nedeterminată și se rezolvă folosind metode adecvate.

În cazul structurilor articulate, pentru controlul invariabilității geometrice și fixării față de teren se stabilește o relație simplă, potri-

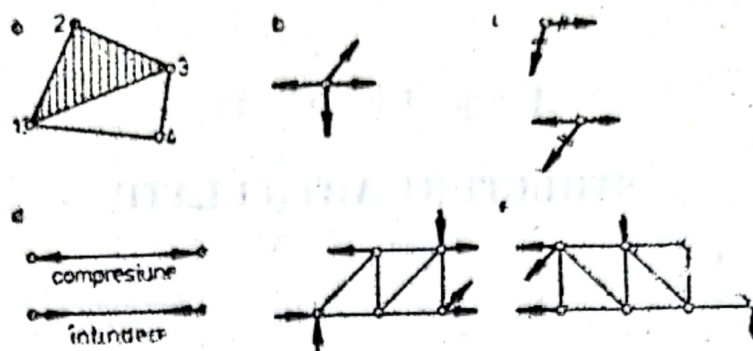


Fig. IV.1

vită specificului acestor sisteme. Se pleacă de la faptul că triunghiul este figura geometrică ce corespunde legării invariabile a trei noduri prin trei bare. Adăugarea unui alt nod necesită alte două bare (fig. IV.1, a). Înseamnă că pentru realizarea unui sistem, format din n noduri, este necesar un număr de $b = 2n - 3$ bare. Relația se mai poate scrie

$$b + 3 = 2n \quad (\text{IV.1})$$

și reprezintă condiția de invariabilitate geometrică proprie a ansamblului. Legarea unui alt nod de primele trei necesită alte două bare (fig. IV.1, a).

Deoarece structura trebuie să fie fixată în plan, aceasta se face cu ajutorul a cel puțin trei legături simple, adică $r = 3$, ceea ce conduce la forma

$$b + r = 2n. \quad (\text{IV.2})$$

Relația (IV.2) reprezintă condiția de invariabilitate geometrică și fixare față de teren a structurii. Ea trebuie înțeleasă în sensul că o legătură în plus cu terenul, față de cele trei minim necesare, poate suplini lipsa unei bare. Relația reprezintă în același timp și condiția de determinare statică, deoarece necunoscutele problemei sînt reacțiunile din cele r legături și eforturile din cele b bare, iar $2n$ numărul de ecuații. Numărul de ecuații este egal cu $2n$ deoarece în fiecare nod se pot scrie numai cîte 2 ecuații de echilibru static, ca urmare a faptului că forțele ce acționează într-un nod formează un sistem de forțe concurente (condiția $M = 0$ este identic satisfăcută).

Relația (IV.2) are un caracter cantitativ, stabilind doar numărul de legături necesar, fără a da vreo indicație referitoare la modul de plasare al acestora. Pentru ca să se obțină cu adevărat structuri invariabile geometric, se impune o atenție deosebită la distribuția

barelor ; în caz contrar rezultă sisteme la care există posibilitatea producerii unor mici deplasări, adică sisteme critice.

Din punct de vedere al modului de alcătuire, grinzile cu zăbrele se împart în următoarele categorii :

- grinzi cu zăbrele simple, realizate dintr-o succesiune de triunghiuri, fără ca acestea să se suprapună.
- grinzi cu zăbrele compuse, realizate dintr-un sistem principal peste care se suprapun unul sau mai multe sisteme secundare,
- grinzi cu zăbrele complexe, care nu se pot încadra în primele două categorii, dar respectă relația (IV.2). Caracteristica acestor grinzi cu zăbrele constă în aceea că în fiecare nod se întâlnesc cel puțin trei bare.

Rezolvarea grinzilor cu zăbrele comportă determinarea reacțiunilor din legăturile cu baza de susținere și a eforturilor din bare.

Pentru calculul eforturilor se cunosc mai multe metode, dintre care cele mai des folosite sînt : metoda izolării nodurilor și metoda secțiunilor simple. Cu ajutorul lor se pot rezolva cu ușurință structurile articulate simple, compuse și uneori cele complexe. Calculul structurilor articulate complexe se face folosind metode specifice, dintre care se vor discuta : metoda înlocuirii barei și metoda dublei secțiuni.

1. *Metoda izolării nodurilor.* În cadrul acestei metode barele și legăturile cu terenul se înlocuiesc prin acțiunile lor asupra nodurilor și rezultă, în fiecare nod, un mănunchi de forțe concurente care trebuie să fie în echilibru. Sînt în total $b + r$ necunoscute și se dispune de $2n$ ecuații de echilibru static, pentru fiecare nod putîndu-se scrie două ecuații de proiecții pe direcții alese convenabil. În cazul structurilor static determinate la care $b + r = 2n$, ecuațiile de echilibru static sînt suficiente pentru aflarea tuturor necunoscutelor. Deci, metoda izolării nodurilor este general valabilă, dar ea se aplică avantajos atunci cînd ecuațiile se pot rezolva pentru fiecare nod în parte. Este vorba de a găsi o ordine de parcurgere a nodurilor astfel încît determinarea eforturilor să se reducă la rezolvarea unei succesiuni de sisteme de ecuații cu cîte două necunoscute. În cazul structurilor articulate simple, după determinarea reacțiunilor, parcurgînd nodurile în ordine inversă celei folosite la alcătuirea structurii, se obține situația de a avea în fiecare nod numai două necunoscute. Calculul se începe cu aflarea reacțiunilor, folosind ecuațiile de echilibru static scrise pentru întregul ansamblu. Din cele $2n$ ecuații disponibile rămîn distincte $2n - 3$ cu ajutorul cărora se pot calcula eforturile din bare ($b = 2n - 3$). Înseamnă că trei dintre cele $2n$ ecuații vor servi drept condiții de verificare.

În aplicarea metodei sînt utile unele observații referitoare la anumite situații particulare privind structura și încărcările:

— dacă într-un nod se întîlnesc numai două bare de direcții diferite și nodul nu este încărcat (fig. IV.1, c), eforturile din cele două bare sînt nule,

— dacă într-un nod se întîlnesc trei bare, dintre care două sînt în prelungire, iar nodul nu este încărcat (fig. IV.1, d), efortul în cea de a treia bară este nul.

Observațiile făcute permit: identificarea barelor inactive ale unei structuri (din anumite situații particulare de încărcare), precum și rezolvarea unor structuri articulate compuse și complexe.

2. *Metoda secțiunilor simple.* Această metodă permite determinarea directă a eforturilor din una sau mai multe bare ale unei structuri, fără a fi necesară cunoașterea eforturilor din celelalte bare. Se izolează porțiuni din structură și se exprimă echilibrul lor cu ajutorul a trei ecuații de echilibru static. Este clar că prin secționarea făcută trebuie să se evidențieze maximum trei eforturi necunoscute (fig. IV.1, d). La scrierea sistemului de ecuații se urmărește ca acesta să aibă rezolvarea cît mai simplă; să se obțină ecuații cu cîte o singură necunoscută. De asemenea, se face observația că reacțiunile se consideră cunoscute, ele rezultînd din exprimarea echilibrului întregii structuri.

Metoda secțiunilor simple este utilizată în special ca metodă de verificare.

3. *Metoda înlocuirii barei.* Metoda se utilizează pentru rezolvarea structurilor complexe. Ea are la bază ideea trecerii la o structură simplă și constă din următoarele:

— se scoate o bară din structură, ab , și se plasează într-o altă poziție, ij , astfel încît în noua configurație structura în ansamblu să rămînă tot static determinată și invariabilă geometric,

— se încarcă structura auxiliară cu forțele P și se calculează eforturile în bare, inclusiv în bara ij (N_{ij}),

— se încarcă structura auxiliară cu o pereche de forțe $X = 1$ pe direcția barei ab și se obține în bara ij efortul n_{ij} . Pentru $X \neq 1$ efortul în bara ij va fi $n_{ij}X$,

— se pune condiția ca efortul total în bara ij să fie egal cu zero, deoarece această bară nu există în realitate. Rezultă

$$N_{ij} = N_{ij} + n_{ij}X = 0, \quad (\text{IV.3})$$

de unde se obține

$$X = -\frac{N_{ij}}{n_{ij}}. \quad (\text{IV.4})$$

Necunoscuta X reprezintă efortul din bara ab .

Cunoscînd forța X , efortul într-o bară oarecare se obține prin suprapunerea efectelor,

$$N_{kl} = N_{kl}^0 + n_{kl}X. \quad (\text{IV.5})$$

4. *Metoda dublei secțiuni.* Și această metodă se utilizează pentru calculul structurilor complexe. Ea constă în următoarele:

- se practică două secțiuni astfel încît ecuațiile de echilibru ce se scriu să formeze un sistem de două ecuații cu două necunoscute,
- se rezolvă sistemul și se obțin eforturile în două bare,
- eforturile în celelalte bare rezultă apoi utilizînd fie metoda izolării nodurilor, fie metoda secțiunilor simple.

APLICAȚII

Problema 4.1. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrelele din figura 4.1, utilizînd metoda izolării nodurilor.

Calculul reacțiunilor:

$$\sum X_i = 0, \quad H_1 = 0,$$

$$\sum M_1 = 0, \quad 60 \cdot 4 + 30 \cdot 10 - V_{12} \cdot 12 = 0, \quad V_{12} = 45 \text{ kN}$$

$$\sum M_{12} = 0, \quad V_1 \cdot 12 - 60 \cdot 8 - 30 \cdot 2 = 0, \quad V_1 = 45 \text{ kN}.$$

Înainte de a proceda la calculul efectiv al eforturilor, se stabilesc barele cu efort egal cu zero, pentru încărcarea dată.

Nodurile 3 și 11 nu sînt încărcate, dar în ele se întîlnesc cîte trei bare dintre care cîte două sînt în prelungire. În consecință, $M_{23} = M_{10-11} = 0$. Deoarece $M_{23} = 0$, din nodul 2, pe aceleași considerente, rezultă $D_{25} = 0$. În continuare, analiza nodului 5 conduce la $M_{45} = 0$.

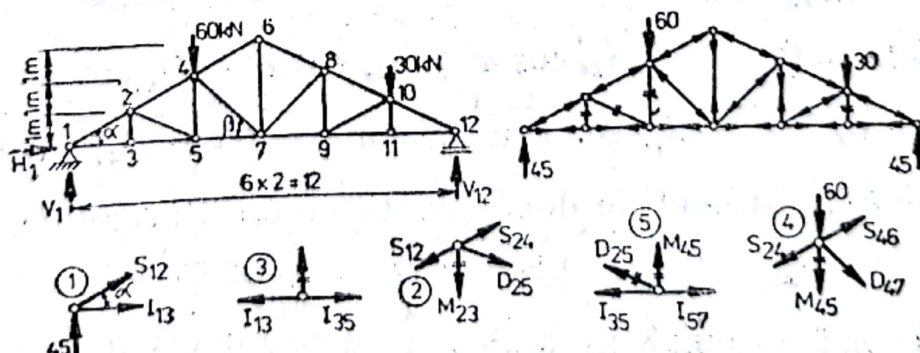


Fig. 4.1

Eforturile din celelalte bare se obțin din condiția de echilibru a fiecărui nod.

Nodul 1

$$\Sigma Y_i = 0, \quad V_1 + S_{12} \sin \alpha = 0, \quad S_{12} = -100,6 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad S_{12} \cos \alpha + I_{13} = 0, \quad I_{13} = 90 \text{ kN.}$$

Semnele eforturilor indică faptul că I_{13} este efort de întindere, iar S_{12} este efort de compresiune.

Nodul 3

$$\Sigma Y_i = 0, \quad M_{23} = 0, \text{ (rezultat cunoscut din cele prezentate anterior)}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad I_{13} - I_{35} = 0, \quad I_{35} = 90 \text{ kN.}$$

Nodul 2

$$\text{Efortul } M_{23} = 0.$$

Din ecuația de proiecții pe normala pe direcția tălpii superioare rezultă că efortul $D_{25} = 0$ (rezultat cunoscut). Se scrie apoi $S_{12} - S_{24} = 0$ și se obține $S_{24} = S_{12} = -100,6 \text{ kN}$. Deci efortul este de compresiune.

Nodul 5

$$\text{Efortul } D_{25} = 0.$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad M_{42} = 0$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad I_{35} - I_{57} = 0, \quad I_{57} = 90 \text{ kN.}$$

Nodul 4

$$\text{Efortul } M_{45} = 0.$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad -S_{24} \cos \alpha + S_{46} \cos \alpha + D_{47} \cos \beta = 0$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad -S_{24} \sin \alpha + S_{46} \sin \alpha - 60 - D_{47} \sin \beta = 0.$$

Rezolvând sistemul de două ecuații cu două necunoscute rezultă:

$$S_{46} = -55,9 \text{ kN}, \quad D_{47} = -56,57 \text{ kN.}$$

Conducând calculul în același mod, rezultă valorile eforturilor înscrise în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

Bara	1-2	1-3	2-3	2-4	2-5	3-5	4-5	4-6
Efortul	-100,6	90	0	-100,6	0	90	0	-55,9
Bara	4-7	5-7	6-7	6-8	7-8	7-9	8-9	8-10
Efortul	-56,57	90	60	-55,9	-14,14	60	15	-67,08
Bara	9-10	9-11	10-11	10-12	11-12	-	-	-
Efortul	-33,54	90	0	-100,6	90	-	-	-

Ultimul nod este nod de verificare. Se verifică dacă nodul 12 este în echilibru sub acțiunea eforturilor S_{10-12} , S_{11-12} și reacțiunii V_{12} . Natura eforturilor a fost reprezentată în figura 4.1 prin săgeți, conform convenției adoptate.

Problema 4.2. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 4.2, utilizând metoda izolării nodurilor.

Calculul reacțiunilor:

$$\sum X_i = 0, \quad H_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0, \quad -V_1 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + 10 \cdot 4 = 0,$$

$$V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = 0, \quad V_1 - V_2 = 0, \quad V_2 = 30 \text{ kN}.$$

Eforturile se calculează începînd cu nodul 6. Barele de efort nul au fost indicate în figură. Valorile eforturilor, în toate barele, sînt prezentate în tabelul 4.2.

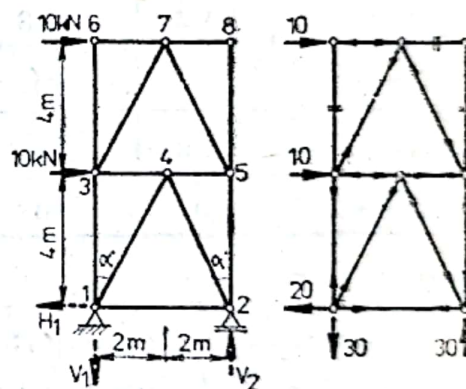


Fig. 4.2

Tabelul 4.2

Bara	1-2	1-3	1-4	2-4	2-5	3-4	3-6
Efortul	10	10	22,36	-22,36	-10	-15	0
Bara	3-7	4-5	5-7	5-8	6-7	7-8	-
Efortul	11,18	5	-11,18	0	-10	0	-

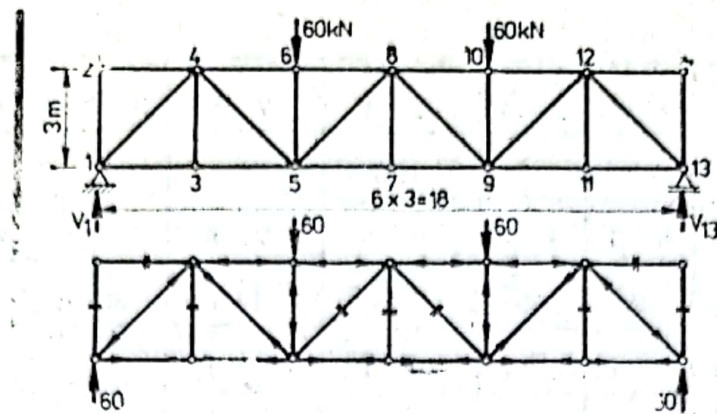


Fig. 4.3

Problema 4.3. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 4.3, utilizând metoda izolării nodurilor.

Calculul reacțiunilor:

Încărcarea fiind simetrică reacțiunile sînt egale; $V_1 = V_{13} = 60$ kN. Eforturile în barele așezate simetric vor fi egale. Pentru jumătate de grindă, eforturile au fost date în tabelul 4.3.

Tabelul 4.3

Bara	1-2	1-3	1-4	2-4	3-4	3-5	4-5
Efortul	0	60	-84,85	0	0	60	84,85
Bara	4-6	5-6	5-7	5-8	6-8	7-8	—
Efortul	-120	-60	120	0	-120	0	—

Problema 4.4. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 4.4, utilizând metoda izolării nodurilor și să se compare cu cele obținute în aplicația 4.3.

Reacțiunile sînt: $V_1 = V_{12} = 0$.

Eforturile sînt date în tabelul 4.4.

Tabelul 4.4

Bara	1-2	1-3	1-4	2-4	3-4	3-5	3-6
Efortul	0	60	-84,85	0	60	120	-84,85
Bara	4-6	5-6	5-7	5-8	6-8	7-8	—
Efortul	-60	0	120	0	-120	0	—

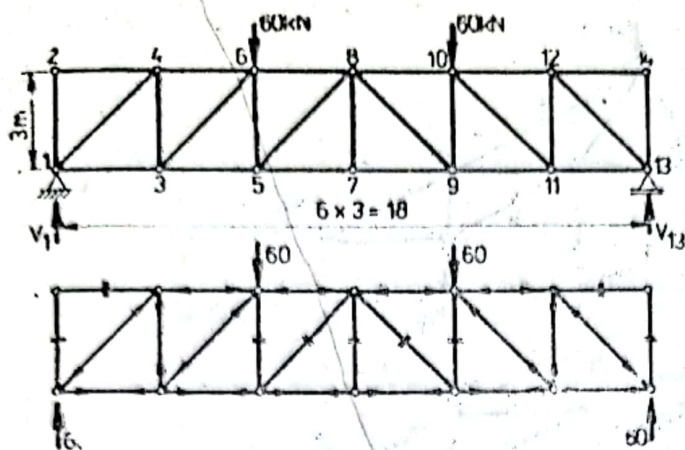


Fig. 4.4

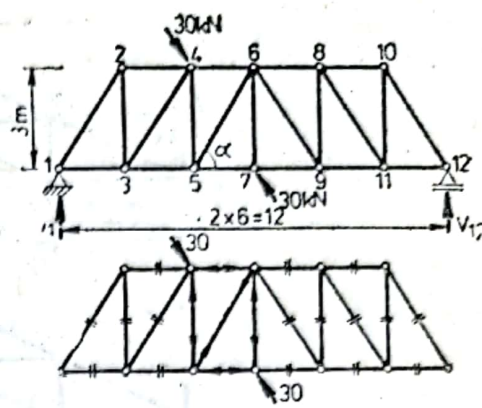


Fig. 4.5

Diferența între grinda cu zăbrele din aplicația precedentă și aceasta constă în modul de așezare a diagonalelor. În ceea ce privește eforturile rezultă că în bara 4—6 efortul scade de la 120 kN la 60 kN, iar în bara 3—5 efortul crește de la 60 kN la 120 kN.

Problema 4.5. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 4.5, utilizând metoda izolării nodurilor.

Forțele exterioare acționând pe același suport, rezultă că reacțiunile sînt egale cu zero.

În consecință, apar eforturi numai în barele panoului asupra căruia acționează forțele. Valorile eforturilor sînt:

$$S_{46} = I_{57} = -16,64 \text{ kN}, \quad M_{45} = M_{67} = -24,96 \text{ kN},$$

$$D_{56} = 30 \text{ kN}.$$

Problema 4.6. Să se determine eforturile din barele intersectate prin secțiunile a—a și b—b, la grinda cu zăbrele din figura 4.6.

Încărcarea fiind simetrică reacțiunile V_3 și V_9 sînt egale,

$$V_3 = V_9 = 40 \text{ kN}.$$

Eforturile din secțiunea a—a:

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru partea din stînga;

$$\Sigma M_6 = 0, \quad -15 \cdot 10 + 40 \cdot 6 - N_{57} \cdot 3 = 0, \quad N_{57} = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_5 = 0, \quad -15 \cdot 8 + 40 \cdot 4 + N_{46} \cdot d_{45} = 0, \quad N_{46} = -22,35 \text{ kN}$$

$$d_{45} = 4 \sin \alpha = 1,78 \text{ m}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad N_{57} + N_{46} \cos \alpha + N_{56} \cos \beta = 0, \quad N_{58} = -36,05 \text{ kN}.$$

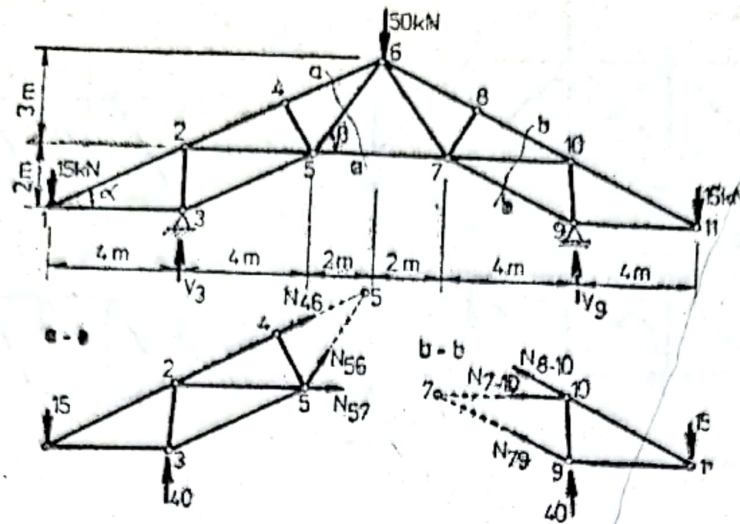


Fig. 4.6

Eforturile din secțiunea b—b :

$$\Sigma M_7 = 0, \quad -N_{8-10} \cdot 4 \sin \alpha - 40 \cdot 4 + 15 \cdot 8 = 0,$$

$$N_{8-10} = -22,36 \text{ kN.}$$

$$\Sigma M_{10} = 0, \quad N_{79} \cdot 2 \cos \alpha + 15 \cdot 4 = 0, \quad N_{79} = -33,54 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad N_{7-10} + N_{8-10} \cos \alpha + N_{79} \cos \alpha = 0, \quad N_{7-10} = 50 \text{ kN.}$$

Eforturile care au rezultat cu semnul minus sînt eforturi de compresie.

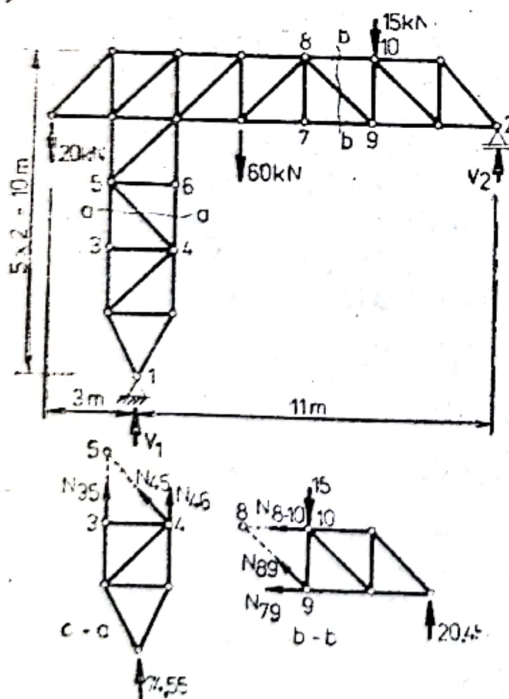


Fig. 4.7

Problema 4.7. Să se determine eforturile din barele indicate prin secțiunile a—a și b—b, la grinda cu zăbrele din figura 4.7.

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma M_2 = 0,$$

$$-20 \cdot 14 - 60 \cdot 8 - 15 \cdot 4 + V_1 \cdot 11 = 0$$

$$\Sigma M_1 = 0,$$

$$-20 \cdot 3 + 60 \cdot 3 + 15 \cdot 7 - V_2 \cdot 11 = 0$$

$$V_1 = 74,55 \text{ kN,}$$

$$V_2 = 20,45 \text{ kN.}$$

Secțiunea a-a:

$$\Sigma M_4 = 0, \quad N_{35} \cdot 2 + 74,55 \cdot 1 = 0, \quad N_{35} = -37,275 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_6 = 0, \quad N_{46} \cdot 2 + 74,55 \cdot 1 = 0, \quad N_{46} = -37,275 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad N_{45} \cos \alpha = 0, \quad N_{45} = 0.$$

Secțiunea b-b:

$$\Sigma M_8 = 0, \quad N_{79} \cdot 2 - 20,45 \cdot 6 = 0, \quad N_{79} = 61,35 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_9 = 0, \quad -N_{8-10} \cdot 2 + 20,45 \cdot 4 = 0, \quad N_{8-10} = 40,90 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y_i = 0, \quad N_{89} \frac{\sqrt{2}}{2} - 15 + 20,45 = 0, \quad N_{89} = 15,41 \text{ kN}.$$

Problema 4.8. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele compuse, din figura 4.8.

Grinda cu zăbrele se poate descompune în două grinzi secundare și o grindă principală.

Se rezolvă fiecare grindă secundară și apoi grinda principală, cu încărcările ce le revin. În final, pentru barele ce fac parte dintr-o grindă secundară și grinda principală, eforturile se determină prin suprapunerea efectelor.

Grinda secundară I.

Reacțiunile sînt: $V_1 = V_5 = 15 \text{ kN}$

Grinda secundară II.

Reacțiunile sînt: $V_5 = 57,5 \text{ kN}$,
 $V_9 = 42,5 \text{ kN}$

Grinda principală.

Reacțiunile sînt: $V_1 = 91,25 \text{ kN}$,
 $V_9 = 118,75 \text{ kN}$.

Eforturile pentru fiecare grindă cu zăbrele sînt date în tabelul 4.5, iar pentru grinda cu zăbrele reală sînt date în tabelul 4.6.

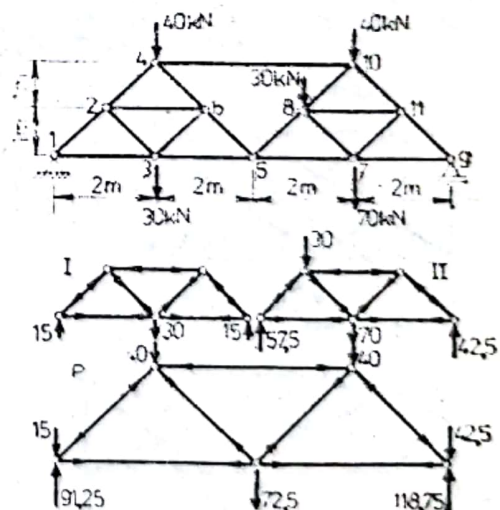


Fig. 4.8

Tabelul 4.5

I.	Bara	1-2	1-3	2-3	2-6	3-5	3-6	5-6
	Efortul	-21,21	15	21,21	-30	15	21,21	-21,21
II.	Bara	5-7	5-8	7-8	7-11	7-9	8-11	9-11
	Efortul	57,5	-81,32	38,89	60,1	42,5	-85	-60,1
P.	Bara	1-4	1-5	4-5	4-10	5-9	5-10	9-10
	Efortul	-107,8	76,25	36,25	-112,50	76,25	51,26	-107,8

Tabelul 4.6

Bara	1-2	1-3	2-3	2-4	2-6	3-5	3-6	4-6	4-10	5-6
Efortul	-129	91,15	21,21	-107,8	-30	91,25	21,21	51,26	-112,50	30,05
Bara	5-7	5-8	7-8	7-9	7-11	8-10	8-11	9-11	10-11	-
Efortul	133,75	-30,05	38,89	118,75	60,1	51,26	-85	-167,9	-107,8	-

Problema 4.9. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele complexe, din figura 4.9, utilizând metoda dublei secțiuni.

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_6 = 0, \quad V_1 \cdot 8 - 30 \cdot 6 - 60 \cdot 4 = 0, \quad V_1 = 52,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 30 \cdot 2 + 60 \cdot 4 - V_6 \cdot 8 = 0, \quad V_6 = 37,5 \text{ kN}.$$

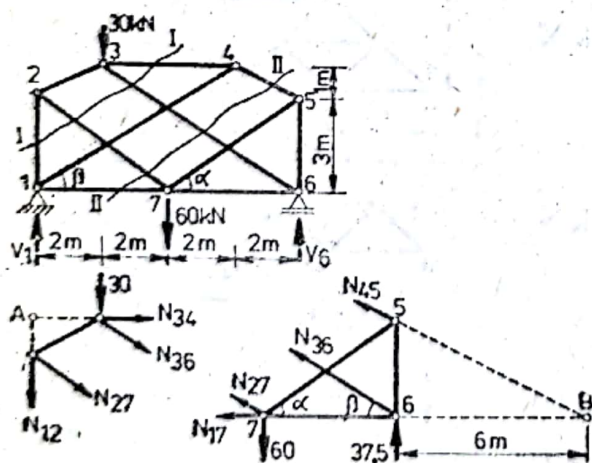


Fig. 4.9

Secțiunile I—I și II—II întâlnesc câte 4 bare, dar două dintre ele sînt comune ambelor secțiuni.

Scriind ecuații de momente nule în raport cu punctele A și B, se obține un sistem de două ecuații cu necunoscutele N_{27} și N_{36} :

$$\Sigma M_A = 0,$$

$$30 \cdot 2 + N_{35} \sin \beta \cdot 2 - N_{27} \cos \alpha \cdot 1 = 0$$

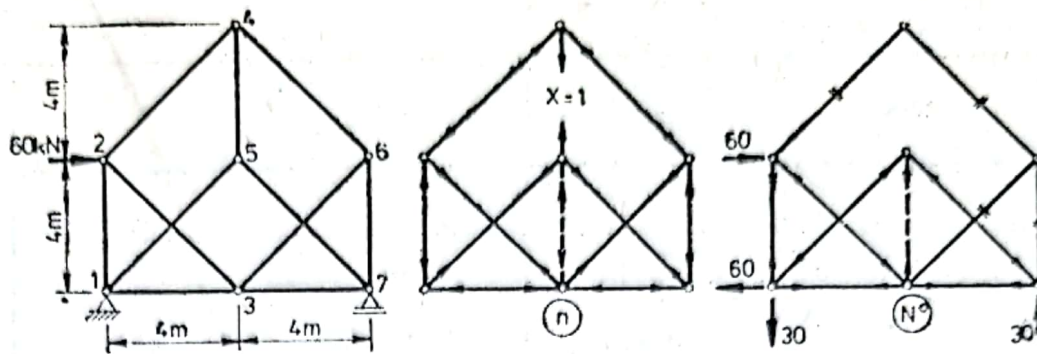


Fig. 4.10

$$\Sigma M_B = 0, \quad N_{27} \sin \alpha \cdot 10 - 60 \cdot 10 + 37,5 \cdot 6 + N_{36} \sin \beta \cdot 6 = 0$$

$$N_{27} = 66 \text{ kN}, \quad N_{36} = -6,45 \text{ kN}.$$

Eforturile în celelalte bare se determină utilizând metoda izolării nodurilor și au valorile:

$$N_{12} = 66 \text{ kN}, \quad N_{14} = 24,33 \text{ kN}, \quad N_{17} = -20,4 \text{ kN}, \quad N_{23} = -59 \text{ kN},$$

$$N_{34} = -47,55 \text{ kN},$$

$$N_{45} = -30,32 \text{ kN}, \quad N_{56} = -18,96 \text{ kN}, \quad N_{57} = 33,90 \text{ kN},$$

$$N_{67} = 5,40 \text{ kN}.$$

Problema 4.10. Să se determine eforturile în barele grinzii cu zăbrele complexe, din figura 4.10, utilizând metoda înlocuirii barei.

Se suprimă bara 4—5 și se introduce în poziția 3—5. Sistemul obținut este rezolvat pentru încărcarea $X = 1$, aplicată pe direcția inițială a barei, obținând eforturile n_{ij} și apoi pentru încărcarea cu forța exterioară de 60 kN, obținând eforturile N_{ij}^0 .

$$\text{În acest caz necunoscuta } X = - \frac{N_{ij}^0}{n_{ij}} = 60 \text{ kN}.$$

Toate eforturile sînt înscrise în tabelul 4.7. Eforturile finale sînt calculate prin suprapunere de efecte;

$$N_{ke} = N_{kl}^0 + n_{kl} X.$$

Problema 4.11. Să se traseze diagramele de eforturi N , T și M la grinda macaz din figura 4.11.

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 16 - 15 \cdot 8 \cdot 12 = 0$$

Tabelul 4.7

Bara	n	N^o	N
1-2	-1	60	0
1-3	-1	90	30
1-5	1,414	-42,43	42,43
2-3	0,707	-84,85	-42,43
2-4	-0,707	0	-42,43
3-5	-1	60	0
3-6	0,707	0	42,43
3-7	-1	30	-30
4-5	1	0	60
4-6	-0,707	0	-42,43
5-7	1,414	-42,43	42,43
6-7	-1	0	-60

$$\Sigma M_3 = 0, \quad 15 \cdot 8 \cdot 4 - V_2 \cdot 16 = 0$$

$$V_1 = 90 \text{ kN}, \quad V_2 = 30 \text{ kN}.$$

Calculul eforturilor:

Barele 1-3 și 2-3 sînt supuse la încovoiere. În celelalte iau naștere numai eforturi axiale. Efortul din bara 6-7 se obține din condiția de moment zero în raport cu punctul 3.

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad N_{67} \cdot 3 - 30 \cdot 8 = 0,$$

$$N_{67} = 80 \text{ kN}.$$

Izolînd nodurile 6 și 7 se determină eforturile axiale din barele dublu articulate.

$$N_{16} \cos \alpha - N_{67} = 0, \quad N_{16} = 100 \text{ kN}$$

$$N_{46} = N_{16} \sin \alpha, \quad N_{46} = 60 \text{ kN}$$

$$N_{27} \cos \alpha - N_{67} = 0, \quad N_{27} = 100 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned}
 N_{57} - N_{27} \sin \alpha &= 0, \quad N_{57} = 60 \text{ kN} \\
 N_{13} + N_{16} \cos \alpha &= 0, \quad N_{13} = -80 \text{ kN} \\
 T_{14} = V_1 - N_{16} \sin \alpha, \quad T_{14} &= 30 \text{ kN} \\
 T_{25} = N_{27} \sin \alpha - V_2, \quad T_{25} &= 40 \text{ kN} \\
 M_4 &= 30 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \\
 M_5 &= 40 \cdot 4 = 160 \text{ kNm.}
 \end{aligned}$$

B. STRUCTURI ARTICULATE SPAȚIALE

Ipotezele simplificatoare sînt aceleași ca în cazul structurilor articulate plane.

Condiția de invariabilitate geometrică proprie are forma

$$b = 3n - 6, \quad (\text{IV.6})$$

deoarece pentru legarea unui nod este nevoie de 3 bare, cu excepția primelor 3 la care este nevoie numai de 3 bare, deci $9 - 3 = 6$.

Condiția de invariabilitate geometrică și fixare față de teren, care reprezintă și condiția de determinare statică, este

$$b + r = 3n. \quad (\text{IV.7})$$

În cazul structurilor spațiale se utilizează ca reazem și articulația sferică, aceasta suprimînd toate cele trei translații și lăsînd libere rotațiile.

Metodele de determinare a eforturilor sînt:

- metoda izolării nodurilor,
- metoda secțiunilor simple,
- metoda descompunerii în sisteme plane.

Metoda izolării nodurilor se aplică la structurile ce au noduri în care se întîlnesc cel mult trei bare cu eforturi necunoscute, deoarece pentru un nod se pot scrie numai trei ecuații de echilibru static.

Metoda secțiunilor simple se utilizează în cazul în care prin secționare se intersectează maximum șase bare, deoarece în spațiu se pot scrie șase ecuații de echilibru static pentru un corp.

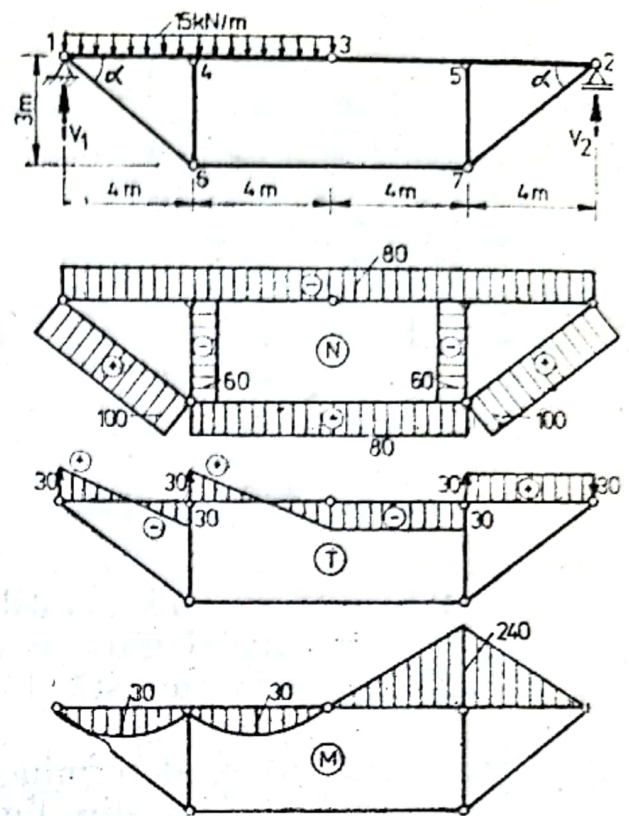


Fig. 4.11

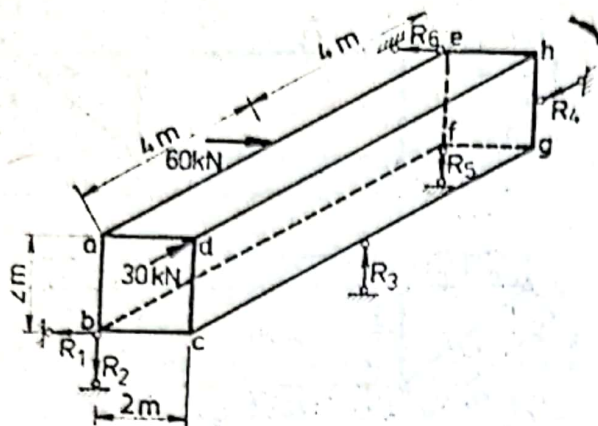


Fig. 4.12

Metoda descompunerii în sisteme plane urmărește rezolvarea separată a fiecărui sistem plan care intră în alcătuirea structurii spațiale, urmînd ca eforturile în barele comune să se determine prin suprapunerea efectelor.

Barele inactive, pentru o anumită încărcare, se determină astfel:

— dacă într-un nod se întîlnesc trei bare care nu sînt coplanare și nodul este neîncărcat, eforturile în toate cele trei bare sînt egale cu zero,

— dacă într-un nod se întîlnesc b bare dintre care $b - 1$ se află într-un plan, iar una singură se află în afara planului și nodul nu este încărcat, efortul în această bară este egal cu zero.

Problema 4.12. Să se determine reacțiunile din legăturile cu terenul ale corpului rigid din figura 4.12.

Condițiile de echilibru static se exprimă astfel:

— proiecție pe axa $d-h$

$$30 - R_4 = 0, \quad R_4 = 30 \text{ kN}$$

— moment în raport cu axa $e-f$

$$R_1 \cdot 8 - 60 \cdot 4 + R_4 \cdot 2 - 30 \cdot 2 = 0,$$

$$R_1 = 30 \text{ kN}$$

— proiecție pe axa $a-d$

$$- R_1 + 60 - R_6 = 0, \quad R_6 = 30 \text{ kN}$$

— moment în raport cu axa $b-f$

$$60 \cdot 2 - R_3 \cdot 2 - R_6 \cdot 2 = 0, \quad R_3 = 30 \text{ kN}$$

— moment în raport cu axa $b-c$

$$30 \cdot 2 - R_3 \cdot 4 - R_4 \cdot 1 + R_5 \cdot 8 = 0, \quad R_5 = 11,25 \text{ kN}$$

— proiecție pe axa $a-b$

$$R_3 - R_5 - R_2 = 0, \quad R_2 = 18,75 \text{ kN}.$$

Sensul real al reacțiunilor este reprezentat în figură.

Problema 4.13. Să se determine reacțiunile din legăturile cu terenul ale corpului rigid din figura 4.13.

Condițiile de echilibru static :

— proiecție pe axa $c - g$

$$60 - R_3 \cos \alpha = 0, \quad R_3 = 63,24 \text{ kN}$$

— moment în raport cu axa $g - h$

$$60 \cdot 4 - 30 \cdot 6 - R_2 \cos \beta \cdot 12 = 0,$$

$$R_2 = 7,07 \text{ kN}$$

— proiecție pe axa $b - c$

$$R_2 \cos \beta + 30 - R_5 \cos \beta = 0,$$

$$R_5 = 49,5 \text{ kN}$$

— moment în raport cu axa $f - g$

$$60 \cdot 3 + R_2 \sin \beta \cdot 12 + R_3 \sin \alpha \cdot 12 - R_1 \cdot 12 = 0, \quad R_1 = 40 \text{ kN}$$

— moment în raport cu axa $c - g$

$$30 \cdot 3 - R_1 \cdot 4 + R_5 \sin \beta \cdot 4 - R_6 \cdot 4 = 0, \quad R_6 = 87,5 \text{ kN}$$

— proiecție pe axa $a - b$

$$-R_1 + R_2 \sin \beta + R_3 \sin \alpha - R_6 + R_5 \sin \beta + R_4 = 0,$$

$$R_4 = 12,5 \text{ kN.}$$

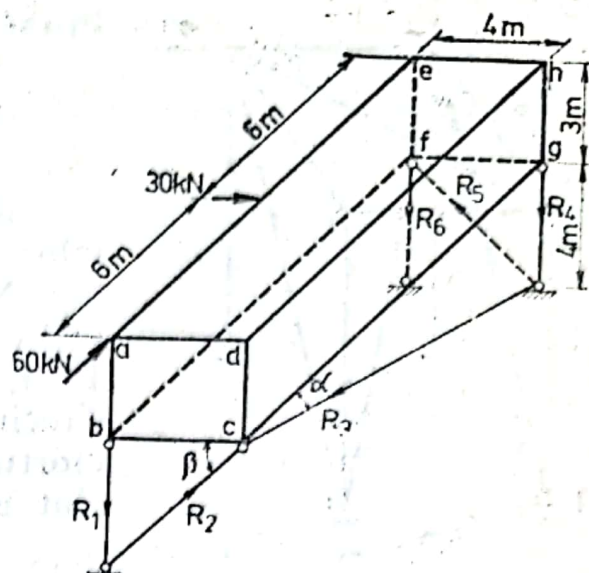


Fig. 4.13

Problema 4.14. Să se determine eforturile din barele sistemului din figura 4.14.

— proiecție pe verticală

$$N_{24} \frac{\sqrt{2}}{2} - 40 = 0, \quad N_{24} = 56,57 \text{ kN}$$

— proiecție pe axa 1-3

$$N_{12} = N_{23}$$

— proiecție pe axa 2-5

$$N_{24} \frac{\sqrt{2}}{2} - (N_{12} + N_{23}) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$N_{12} = N_{23} = 28,28 \text{ kN.}$$

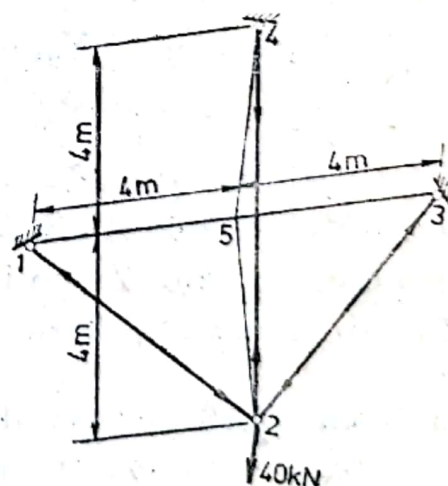


Fig. 4.14

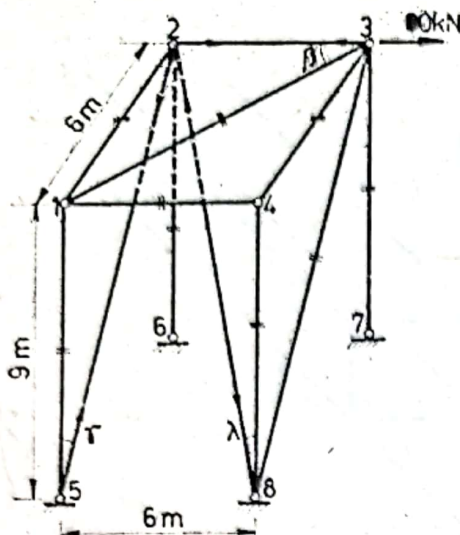


Fig. 4.15

Problema 4.15. Să se determine eforturile în barele structurii spațiale din figura 4.15, utilizând metoda izolării nodurilor.

Rezolvarea se începe cu stabilirea barelor de efort nul, pentru încărcarea dată.

Nodul 4 este neîncărcat, în el se întâlnesc trei bare, deci eforturile din barele 1—4, 3—4 și 4—8 sînt egale cu zero. Trecînd în nodul 1, din același motiv, eforturile în barele 1—2, 1—3 și 1—5 sînt egale cu zero.

Din echilibrul nodului 3 rezultă :

$$N_{23} = 60 \text{ kN}, \quad N_{37} = N_{38} = 0.$$

Rămîne de studiat echilibrul nodului 2 :

— proiecție pe axa 2—3

$$N_{28} \sin \lambda \cos \beta - 60 = 0, \quad N_{28} = \frac{60}{\sin \lambda \cos \beta} = 123,7 \text{ kN}$$

— proiecție pe axa 1—2

$$N_{25} \sin \gamma - N_{28} \sin \lambda \sin \beta = 0.$$

$$N_{25} = \frac{30\sqrt{17} \sin \lambda \sin \beta}{\sin \gamma} = 108,2 \text{ kN}$$

— proiecție pe direcția 2—6]

$$N_{25} \cos \gamma - N_{28} \cos \lambda + N_{26} = 0,$$

$$N_{26} = 0.$$

Concluzia că $N_{26} = 0$ se putea obține observînd că barele 2—3, 2—5 și 2—8 formează un plan, iar bara 2—6 iese din acest plan, deci efortul în această bară este nul.

Problema 4.16. Să se determine eforturile din barele structurii spațiale din figura 4.16. Forța acționează după direcția barei 1—4.

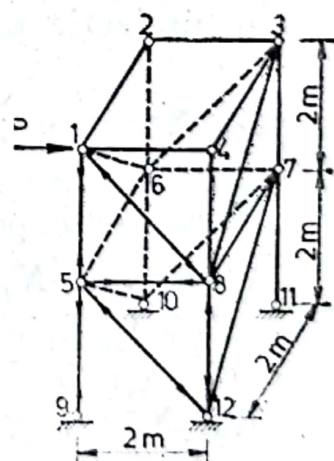


Fig. 4.16

Eforturi diferite de zero apar numai în barele din planul 1-4-9-12.

În barele situate în celelalte plane eforturile sînt egale cu zero.

$$N_{13} = P\sqrt{2}, \quad N_{15} = P, \quad N_{53} = P,$$

$$N_{8-12} = P, \quad N_{5-12} = P\sqrt{2}, \quad N_{59} = P.$$

Capitolul V

ARCE STATIC DETERMINATE

Arcele sînt bare curbe plane sau sisteme de bare curbe plane, încărcate cu forțe acționînd în planul lor. Caracteristic lor este faptul că datorită împingerilor laterale se obține o reducere importantă a momentelor încovoietoare față de grinzile simplu rezemate cu aceleași deschideri. Deci, arcele se comportă mai bine decît grinzile drepte și de aceea se folosesc la realizarea unor construcții cu deschideri mari.

Tipurile de arce static determinate sînt următoarele:

- arcul cu trei articulații (fig. V.1, a),
- arcul cu tirant (fig. V.1, b),
- arcul cu o articulație și un reazem simplu (fig. V.1, c).

Arcul cu o articulație și un reazem simplu (arcul simplu rezemat) nu se întîlnește în practică, el fiind utilizat numai ca instrument de calcul în rezolvarea arcelor static nedeterminate.

Arcul cu trei articulații este cel mai reprezentativ și el se folosește atunci cînd baza de susținere poate prelua în condiții optime împingerile orizontale ce iau naștere.



Fig. V.1

Arcul cu tirant se utilizează ori de cîte ori preluarea împingerilor orizontale, prin fundații sau alte elemente constructive, nu este posibilă sau nu este rațională din punct de vedere economic.

Curbele cele mai des utilizate pentru realizarea arcelor sînt: arcul de cerc și arcul de parabolă.

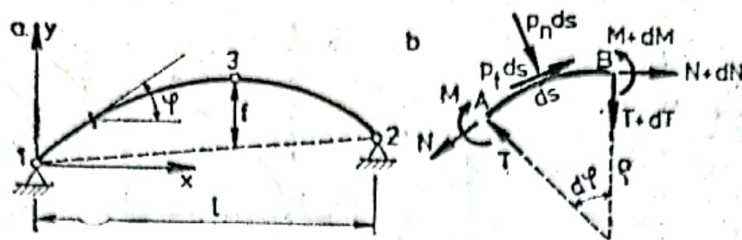


Fig. V.2

Elementele caracteristice ale unui arc (fig. V.2, a) se prezintă în continuare :

- *nașterile arcului*, secțiunile de la reazemele 1 și 2,
- *cheia arcului*, punctul cel mai îndepărtat de linia nașterilor ;
- la arcele triplu articulate, articulația intermediară (3) se așază la cheia,
- *săgeata arcului*, distanța pe verticală măsurată de la cheia la linia nașterilor și notată cu f ,
- *deschiderea arcului*, distanța dintre nașteri, măsurată pe orizontală și notată cu l ,
- *unghiul* φ format de tangenta la curbă, în secțiunea curentă, cu orizontala,
- *extradosul și intradosul arcului*, fața exterioară și respectiv interioară a arcului.

Și în cazul barei curbe plane, ca și la grinda dreaptă, se pot stabili relații între eforturi și forțele exterioare, studiind echilibrul unui element de arc de lungime ds (fig. V.2, b).

Ținând seama că $ds = \rho d\varphi$ și admițînd că $\cos d\varphi = 1$ și $\sin d\varphi = d\varphi$, se obțin următoarele relații :

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho}, \quad \frac{dT}{ds} = -p_n - \frac{N}{\rho}, \quad \frac{dM}{ds} = T. \quad (V.1)$$

Relațiile (V.1) sînt mai generale decît cele stabilite la bara dreaptă, acestea din urmă putîndu-se obține foarte ușor dacă se consideră $\rho = \infty$.

Rezolvarea arcelor static determinate implică calculul reacțiunilor și eforturilor.

În cazul general al unui arc triplu articulat, avînd reazemele denivelate și supus acțiunii unor încărcări oarecare (fig. V.3, a), reacțiunile și eforturile în secțiunea curentă au următoarele expresii:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V'_1 = \frac{\Sigma P_i b_i}{l},$$

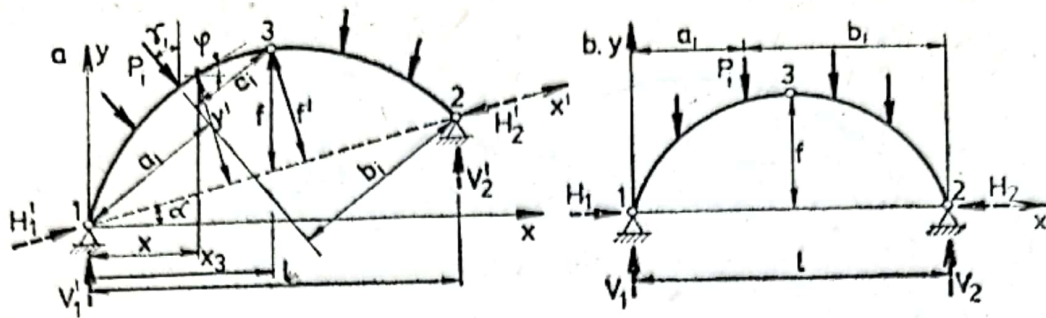


Fig. V.3

$$\begin{aligned}\Sigma M_1 &= 0, & V_2' &= \frac{\Sigma P_i a_i}{l}, \\ \Sigma M_3 &= 0, & H_1' &= \frac{V_1' x_3 - \Sigma P_i c_i}{f'}, \\ \Sigma X_i &= 0, & H_2' &= \frac{H_1' \cos \alpha + \Sigma P_i \sin \gamma_i}{\cos \alpha}, \\ N_x &= -V_1' \sin \varphi - H_1' \cos (\varphi - \alpha) + \Sigma P_i \sin (\varphi - \gamma_i), \\ T_x &= V_1' \cos \varphi - H_1' \sin (\varphi - \alpha) - \Sigma P_i \cos (\varphi - \gamma_i), \\ M_x &= V_1' x - H_1' y' - \Sigma P_i d_i,\end{aligned}\tag{V.2}$$

unde x și y' sînt coordonatele secțiunii curente, iar d_i este distanța de la forța curentă, din stînga secțiunii considerate, la această secțiune.

În cazul particular al arcului triplu articulat avînd reazemele la același nivel și încărcat cu forțe verticale, situație dintre cele mai frecvente în practică, expresiile (V.2) primesc o formă mai simplă, deoarece $\alpha = \gamma_i = 0$, $f' = f$ și $y' = y$. Rezultă:

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{\Sigma P_i b_i}{l}, & V_2 &= \frac{\Sigma P_i a_i}{l}, & H_1 &= H_2 = \frac{M_3^0}{f} = H, \\ N_x &= -T_x^0 \sin \varphi - H \cos \varphi, \\ T_x &= T_x^0 \cos \varphi - H \sin \varphi, \\ M_x &= M_x^0 - Hy.\end{aligned}\tag{V.3}$$

În aceste relații T_x^0 și M_x^0 sînt forța tăietoare și respectiv momentul încovoietor din secțiunea curentă pe grinda simplu rezemată

care are aceeași deschidere cu arcul și aceleași încărcări verticale, iar M_3^0 este momentul încovoietor din secțiunea 3 pe aceeași grindă simplu rezemată.

La arcul cu tirant reacțiunile se determină ca pentru o grindă simplu rezemată, iar efortul din tirant se obține din condiția de moment zero în articulația interioară, fie pentru forțele de la stînga, fie pentru forțele de la dreapta.

Observații. Dintre cele trei eforturi ce apar în secțiunea curentă a arcului, ponderea cea mai mare o au forța axială și momentul încovoietor.

Dacă pentru o anumită încărcare rezultă momentul încovoietor egal cu zero în toate secțiunile, arcul se numește arc de coincidență pentru încărcarea respectivă.

În cazul încărcării verticale, uniform distribuite pe toată deschiderea, arcul de coincidență este o parabolă, avînd ecuația $y = \frac{4f}{l^2} x(l - x)$, dacă originea sistemului de axe este punctul 1, din figura V.3, b.

APLICAȚII

Problema 5.1. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială la arcul parabolic din figura 5.1.

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 16 - 120 \cdot 12 = 0,$$

$$V_1 = 90 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 120 \cdot 4 - V_2 \cdot 16 = 0,$$

$$V_2 = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{st} = 0,$$

$$90 \cdot 8 - H_1 \cdot 4 - 120 \cdot 4 = 0,$$

$$H_1 = 60 \text{ kN}$$

$$\Sigma X_i = 0, \quad H_1 - H_2 = 0,$$

$$H_2 = 60 \text{ kN}.$$

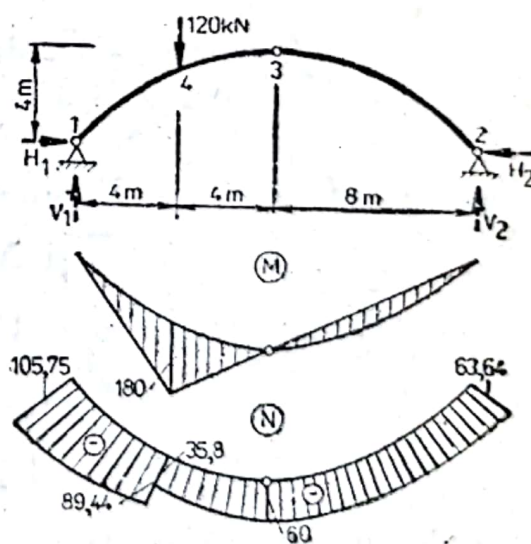


Fig. 5.1.

Calculul momentelor încovoietoare :

Încărcarea fiind verticală, momentul încovoietor într-o secțiune se obține cu relația $M_x = M_x^0 - Hy$, unde M_x^0 este momentul încovoietor pe grinda simplu rezemată avînd aceeași deschidere și aceeași încărcare.

Momentul încovoietor în secțiunea 4;

Ecuația parabolei fiind

$$y = \frac{4fx}{l^2} (l - x), \text{ pentru } x = 4m \text{ rezultă } y = 3m.$$

$$M_4 = V_1 \cdot 4 - H_1 \cdot 3 = 180 \text{ kNm.}$$

Momentul încovoietor maxim pe intervalul 2—3 se obține în secțiunea în care se anulează forța tăietoare,

$$T_x = H_2 \sin \varphi - V_2 \cos \varphi = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{V_2}{H_2} = \frac{1}{2}.$$

Din ecuația parabolei rezultă $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x)$ și deci

$$\frac{1}{2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x), \text{ de unde } x = \frac{l}{4} = 4 \text{ m și } y = 3 \text{ m}$$

$$M_{max} = -H_2 \cdot 3 + V_2 \cdot 4 = -60 \text{ kNm.}$$

Calculul forțelor axiale :

$$N_{14} = -H_1 \cos \varphi - V_1 \sin \varphi, \text{ pentru } x = 0, \text{ rezultă } \varphi_1 = 45^\circ$$

$$\text{și } N_{14} = -105,75 \text{ kN}$$

$$N_{41} = -H_1 \cos \varphi - V_1 \sin \varphi, \text{ pentru } x = 4m, \text{ rezultă } \varphi_4 = 26^\circ 56'$$

$$\text{și } N_{41} = -89,44 \text{ kN}$$

$$N_{43} = -H_1 \cos \varphi - V_1 \sin \varphi + 120 \sin \varphi = -35,80 \text{ kN}$$

$$N_3 = H_1 = -60 \text{ kN}$$

$$N_{23} = -H_2 \cos \varphi - V_2 \sin \varphi, \varphi = 45^\circ, N_{23} = -63,64 \text{ kN.}$$

Problema 5.2. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și forță axială la arcul parabolic din figura 5.2.

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 24 - 10 \cdot 12 \cdot 6 = 0, \quad V_1 = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 10 \cdot 12 \cdot 18 - V_2 \cdot 24 = 0, \quad V_2 = 90 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{\text{st}} = 0, \quad 30 \cdot 12 - H_1 \cdot 5 = 0, \quad H_1 = 72 \text{ kN}$$

$$\Sigma x_i = 0, \quad H_1 - H_2 = 0, \quad H_2 = 72 \text{ kN}.$$

Calculul momentelor încovoietoare:

Momentul încovoietor maxim pe intervalul 2-3 se află în secțiunea în care se anulează forța tăietoare.

$$T_x = H_2 \sin \varphi - V_2 \cos \varphi + px \cos \varphi = 0, \text{ de unde rezultă}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_2 + px}{H_2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x), \text{ iar apoi, pentru exemplul studiat,}$$

$$x = 6 \text{ m și } y = 3,75 \text{ m}$$

$$M_{\max} = V_2 \cdot 6 - H_2 \cdot 3,75 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = 90 \text{ kNm.}$$

Calculul forțelor axiale:

$$N_1 = -H_1 \cos \varphi - V_1 \sin \varphi; \quad x = 0, \quad \sin \varphi = 0,64,$$

$$\cos \varphi = 0,77, \quad N_1 = 74,64 \text{ kN}$$

$$N_3 = -H_1 = -72 \text{ kN}$$

$$N_2 = -H_2 \cos \varphi - V_2 \sin \varphi;$$

$$\sin \varphi = 0,64, \quad \cos \varphi = 0,77,$$

$$N_2 = 113 \text{ kN.}$$

Problema 5.3. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și forță axială la arcul parabolic din figura 5.3.

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0,$$

$$V_1 \cdot 18 - 10 \cdot 9 \cdot 13,5 - 60 \cdot 4,50 = 0$$

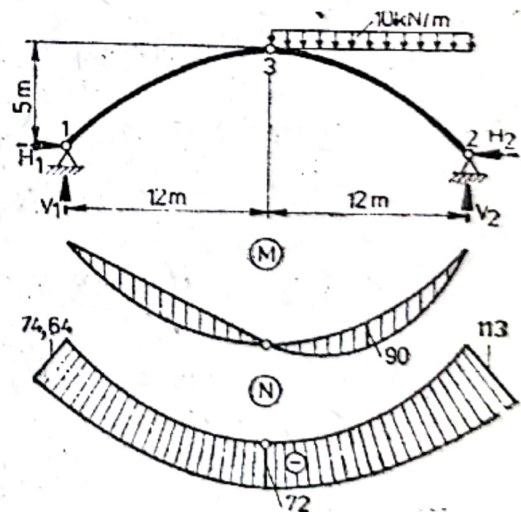


Fig. 5.2

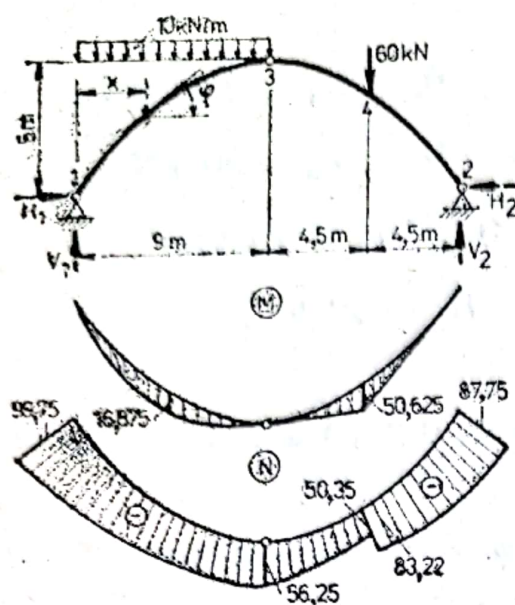


Fig. 5.3

$$\Sigma M_1 = 0,$$

$$10 \cdot 9 \cdot 4,5 + 60 \cdot 13,5 - V_2 \cdot 18 = 0,$$

$$V_1 = 82,5 \text{ kN}, \quad V_2 = 67,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^d = 0,$$

$$V_1 \cdot 9 - H_1 \cdot 6 - 10 \cdot 9 \cdot 4,5 = 0,$$

$$H_1 = 56,25 \text{ kN}.$$

Calculul momentelor încovoietoare:

Momentul încovoitor maxim pe intervalul 1-3,

$$T_x = V_1 \cos \varphi - H_1 \sin \varphi - 10 x \cos \varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_1 - 10x}{H_1} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x), \quad x = 4,5 \text{ m}$$

$$M_{max} = V_1 \cdot 4,5 - H_1 \cdot \frac{3}{4} f - 10 \frac{4,5^2}{2} = 16,875 \text{ kNm}$$

$$M_4 = V_2 \cdot 4,5 - H_2 \cdot \frac{3}{4} f = 50,625 \text{ kNm}.$$

Calculul forțelor axiale:

$$N_{13} = -H_1 \cos \varphi_1 - V_1 \sin \varphi_1; \quad \sin \varphi_1 = 0,8, \quad \cos \varphi_1 = 0,6$$

$$N_{13} = -99,75 \text{ kN}$$

$$N_{31} = -56,25 \text{ kN}$$

$$N_{24} = -H_2 \cos \varphi_2 - V_1 \sin \varphi_2, \quad N_{24} = -87,75 \text{ kN}$$

$$N_{42} = -H_2 \cos \varphi_4 - V_2 \sin \varphi_4; \quad \sin \varphi_4 = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos \varphi_4 = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$N_{42} = -83,22 \text{ kN}$$

$$N_{43} = N_{42} + 60 \sin \varphi_4 = -50,35 \text{ kN}.$$

Problema 5.4. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și forță axială la arcul parabolic din figura 5.4.

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma M_2 = 0,$$

$$V_1 \cdot 12 - 30 \cdot 14 - H_1 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$\Sigma M_3' = 0, \quad V_1 \cdot 6 - 30 \cdot 8 - H_1 \cdot 9 = 0$$

$$V_1 = 55 \text{ kN}, \quad H_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0,$$

$$-30 \cdot 2 + 10 \cdot 6 \cdot 9 - V_2 \cdot 12 - H_2 \cdot 6 = 0$$

$$\Sigma M_3^{dr} = 0,$$

$$10 \cdot 6 \cdot 3 - V_2 \cdot 6 + H_2 \cdot 3 = 0$$

$$V_2 = 35 \text{ kN}, \quad H_2 = 10 \text{ kN}.$$

Momentul încovoietor maxim pe intervalul 2-3;

$$T_x = V_2 \cos \varphi - H_2 \sin \varphi - 10 x \cos \varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_2 - 10x}{H_2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x),$$

$$x = 3 \text{ m}.$$

$$M_{max} = 3 V_2 - \frac{3}{4} f H_2 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 = 47,5 \text{ kNm}.$$

Calculul forțelor axiale:

$$N_{43} = -H_1 \cos \varphi_4 - V_1 \sin \varphi_4 + 30 \sin \varphi_4; \quad \varphi_4 = 45^\circ,$$

$$N_{43} = -24,75 \text{ kN}$$

$$N_3 = -10 \text{ kN}$$

$$N_{23} = -H_2 \cos \varphi_2 - V_2 \sin \varphi_2; \quad \varphi_2 = 45^\circ,$$

$$N_{23} = -31,82 \text{ kN}.$$

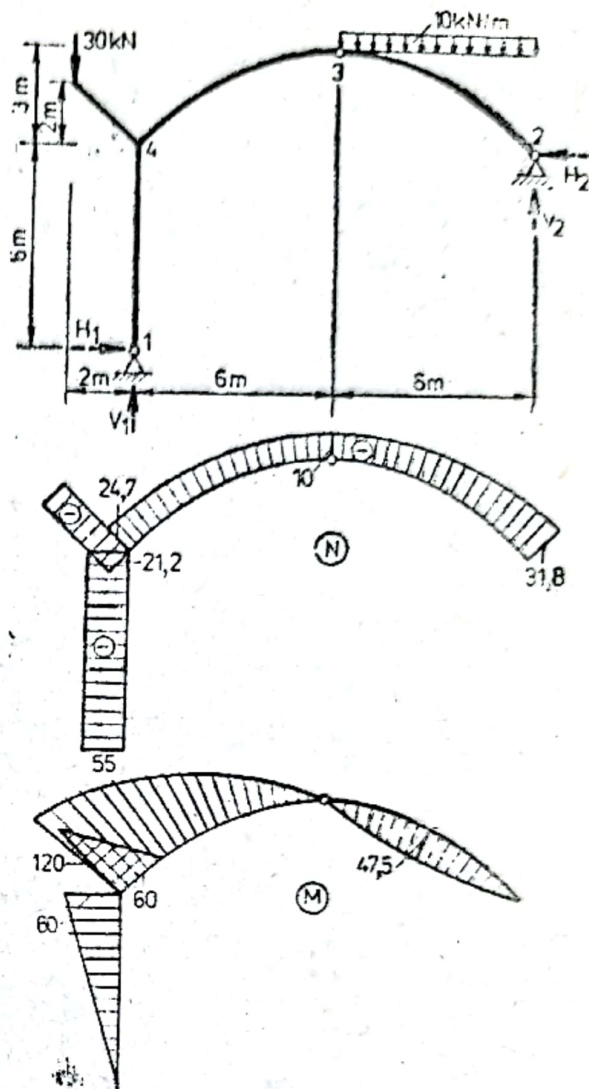


Fig. 5.4

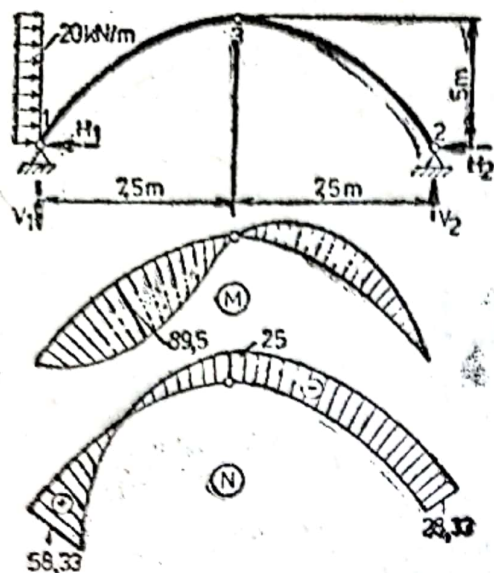


Fig. 5.5

Problema 5.5. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și forță axială la arcul parabolic din figura 5.5.

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma M_2 = 0, \quad 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - V_1 \cdot 15 = 0$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - V_2 \cdot 15 = 0$$

$$V_1 = V_2 = 16,67 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad H_2 \cdot 5 - V_2 \cdot 7,5 = 0,$$

$$H_2 = 25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{st} = 0, \quad H_1 \cdot 5 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - V_1 \cdot 7,5 = 0, \quad H_1 = 75 \text{ kN}.$$

Momentul încovoietor maxim pe intervalul 1 – 3,

$$T_x = H_1 \sin \varphi - V_1 \cos \varphi - 20 y \sin \varphi = 0.$$

Deoarece $y = \frac{4fx}{l^2} (l - x)$, iar $\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x)$, rezultă

$$\tan \varphi = \frac{V_1}{H_1 - 20y},$$

$$\text{de unde } x = \frac{l}{6} = 2,5 \text{ m și } y = \frac{5}{9} f = 2,78 \text{ m}.$$

$$M_{max} = H_1 y - V_1 x - p \frac{y^2}{2} = 89,5 \text{ kNm}.$$

Calculul forțelor axiale :

$$N_{13} = V_1 \sin \varphi_1 + H_1 \cos \varphi_1 - p y \cos \varphi_1;$$

$$- \text{ pentru } x = 0, \quad y = 0, \quad \sin \varphi_1 = \frac{4}{5}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{3}{5} \text{ și}$$

$$N_{13} = 58,33 \text{ kN}$$

$$- \text{ pentru } x = \frac{l}{2}, \quad y = f, \quad \varphi_3 = 0, \quad N_{31} = -25 \text{ kN}$$

$$N_{23} = -V_2 \sin \varphi_2 - H_2 \cos \varphi_2; \quad N_{23} = -28,33 \text{ kN}.$$

Problema 5.6. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și forță axială la arcul parabolic cu tirant, din figura 5.6.

Arcul are aceleași dimensiuni și aceeași încărcare ca arcul de la problema 5.2.

Calculul reacțiunilor :

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0, & H_1 &= 0 \\ \Sigma M_2 &= 0, & V_1 \cdot 24 - 10 \cdot 12 \cdot 6 &= 0 \\ \Sigma M_1 &= 0, & 10 \cdot 12 \cdot 18 - V_2 \cdot 24 &= 0 \\ V_1 &= 30 \text{ kN}, & V_2 &= 90 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Calculul efortului din tirant

$$\begin{aligned}\Sigma M_3^{st} &= 0, & V_1 \cdot 12 - T \cdot 5 &= 0, \\ T &= 72 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Se constată că efortul din tirant este egal cu reacțiunile orizontale ale arcului triplu articulat.

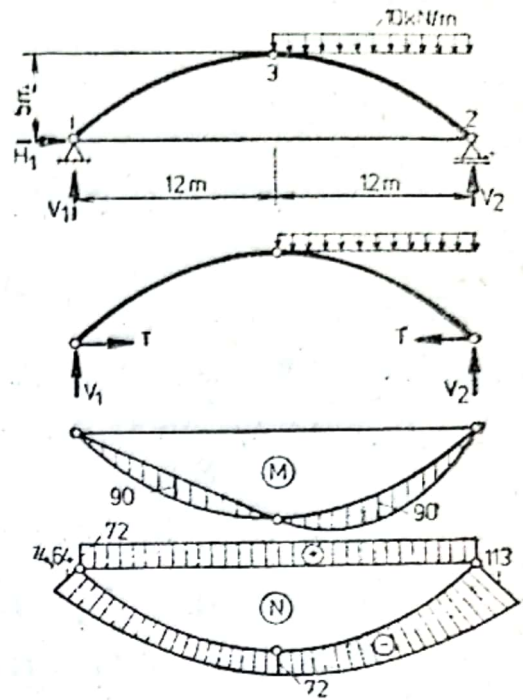


Fig. 5.6

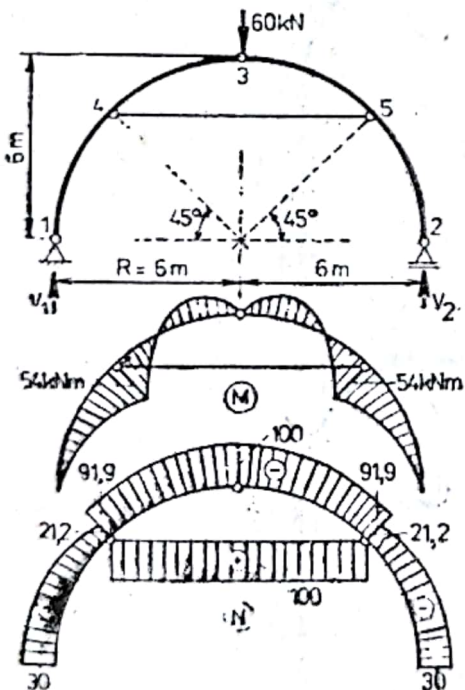


Fig. 5.7

Diagramele de eforturi au aceeași alură și valori pe arc, dar apare în plus diagrama de efort axial pe tirant.

Problema 5.7. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și forță axială la arcul de cerc cu tirant, din figura 5.7.

Reacțiunile : $V_1 = V_2 = 30 \text{ kN}$

$$\begin{aligned}\Sigma M_3^{st} &= 0, & V_1 R - T R \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 0, \\ T &= 100 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Momentul încovoietor

$$M_4 = V_1 R (1 - \sin 45^\circ) = 54 \text{ kNm}.$$

Forțele axiale :

$$N_{14} = -V_1 = -30 \text{ kN}$$

$$N_{41} = -V_1 \sin \varphi_4 = -21,21 \text{ kN}$$

$$N_{43} = -V_1 \sin \varphi_4 - T \cos \varphi_4 = -91,92 \text{ kN}$$

$$N_3 = -100 \text{ kN.}$$

Problema 5.8. Să se traseze diagramele de forță axială, forță tăietoare și moment încovoietor la arcul circular din figura 5.8, avînd raza $R = 6 \text{ m}$.

Calculul reacțiunilor :

$$\Sigma M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 12 - 20 \cdot 6 \cdot 9 = 0, \quad V_1 = 90 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0, \quad 20 \cdot 6 \cdot 3 - V_2 \cdot 12 = 0, \quad V_2 = 30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{dr} = 0, \quad H_2 \cdot 15 - V_2 \cdot 6 = 0, \quad H_2 = 12 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_3^{st} = 0, \quad V_1 \cdot 6 - H_1 \cdot 15 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0, \quad H_1 = 12 \text{ kN.}$$

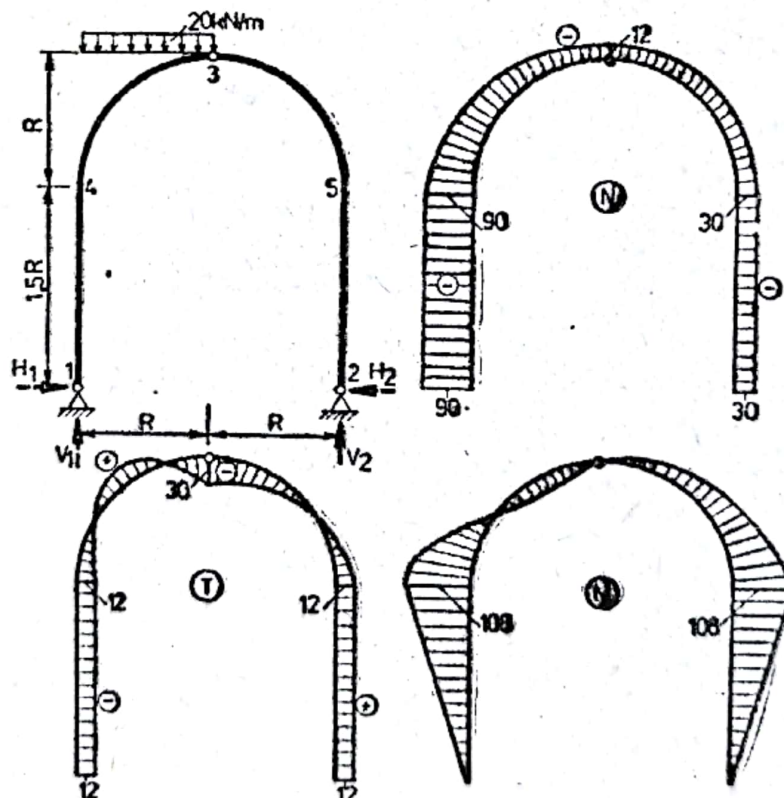


Fig. 5.8

Forța tăietoare și forța axială pe intervalul 3 – 4:

$$T_x = V_1 \cos \varphi - H_1 \sin \varphi - 20 x \cos \varphi$$

$$N_x = -V_1 \sin \varphi - H_1 \cos \varphi + 20 x \sin \varphi.$$

Momentul încovoietor pe intervalul 3 – 4:

$$M_x = V_1 x - H_1(R + y) - 20 \frac{x^2}{2}.$$

Pentru diverse valori ale lui x se obțin eforturile căutate. De exemplu, pentru secțiunea aflată la 45° față de diametrul vertical rezultă:

$$N_{45^\circ} = -46,67 \text{ kN}, \quad T_{45^\circ} = 29,7 \text{ kN}, \quad M_{45^\circ} = -28,8 \text{ kNm}.$$

Luv. 72078

Capitolul VI.

UTILIZAREA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL LA CALCULUL EFORTURILOR ÎN STRUCTURILE STATIC DETERMINATE

Principiul lucrului mecanic virtual exprimă starea de echilibru a unui sistem material supus acțiunii unui ansamblu de forțe.

Pentru ca un efort să apară în ecuația de lucru mecanic, trebuie exteriorizat. Aceasta se face suprimând legătura corespunzătoare efortului și înlocuind-o cu efortul. Astfel, sistemul static determinat se transformă în mecanism cu un grad de libertate și este în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare date și a efortului exteriorizat. În figura VI.1, b, c se prezintă două exemple de mecanisme obținute din structura static determinată (fig. VI.1, a) în cazul în care ar urma să se calculeze reacțiunea orizontală sau momentele încovoietoare de la capetele barelor fixate într-un nod rigid. Deoarece deplasarea are caracter cinematic, vor produce lucru mecanic numai forțele exterioare. Dând o deplasare virtuală mecanismului aflat în echilibru, condiția de lucru mecanic virtual nul se exprimă printr-o ecuație

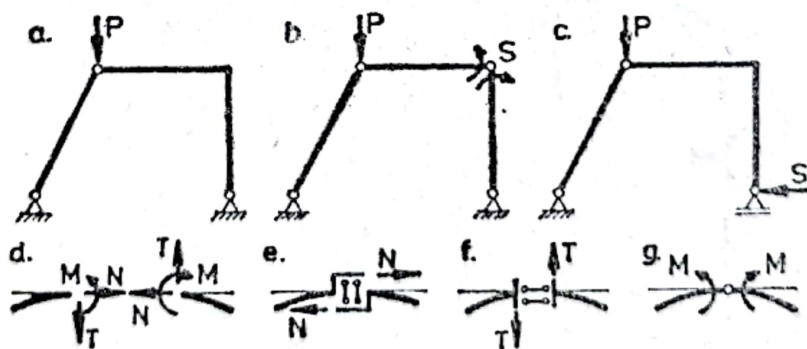


Fig. VI.1

cu o singură necunoscută și anume, mărimea echivalentului mecanic al legăturii suprimate

$$S\delta_s + \sum P_i \eta_i + \sum M_j \psi_j = 0, \quad (\text{VI.1})$$

unde S este mărimea statică ce urmează a fi determinată, iar δ_s , deplasarea pe direcția lui S .

Studiul deplasărilor virtuale se face după legile cinematicii pentru deplasări infinit mici.

Obținerea unui grad de libertate presupune efectuarea unei secționări incomplete. În figura VI.1, e, f, g se prezintă schematizarea legăturilor dintr-o secțiune curentă dacă se presupune îndepărtată legătura corespunzătoare forței axiale, a forței tăietoare sau a momentului încovoietor.

În cadrul deplasării virtuale, deplasarea unui corp al mecanismului cu un grad de libertate determină și deplasarea celorlalte, poziția deplasată depinzând de un singur parametru. Este deci necesar să se stabilească corelațiile dintre diferitele porțiuni ale sistemului transformat.

Se știe că deplasarea infinit mică a unei porțiuni rigide în plan poate fi considerată ca o rotație în jurul unui punct din plan, numit centru instantaneu absolut de rotație. Rezultă că deplasarea unui punct al corpului este perpendiculară pe segmentul care unește punctul cu centrul instantaneu de rotație. Poziția centrului instantaneu absolut de rotație se află deci cunoscând direcțiile deplasărilor a două puncte ale corpului și este fixă în plan.

Considerînd două corpuri, rotirea lor relativă se produce în jurul unui punct numit centru instantaneu relativ de rotație, care poate fi privit ca un punct comun celor două corpuri.

Pentru un mecanism alcătuit din n corpuri vor fi n centre absolute și C_n^2 centre relative.

Determinarea pozițiilor centrelor instantanee este mult ușurată de existența teoremei coliniarității care conduce la concluziile:

— pentru două porțiuni rigide, centrele instantanee absolute de rotație și centrul instantaneu relativ sînt coliniare,

— pentru trei porțiuni rigide, centrele instantanee relative de rotație sînt coliniare.

Cunoscînd aceste elemente se pot determina cu ușurință rotirile tuturor barelor

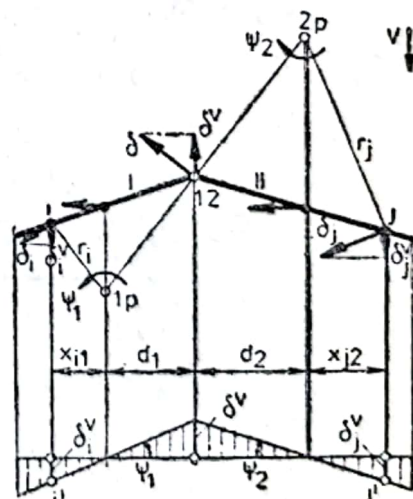


Fig. VI.2

O simplificare substanțială în studiul deplasărilor virtuale se obține dacă se trasează diagramele proiecțiilor după anumite direcții date, ale deplasărilor tuturor punctelor unui sistem. Diagramele de deplasări permit stabilirea unor corelații directe între rotațiile diferitele părți ale mecanismului, precum și deplasările punctelor lor.

— fiecărei părți rigide din sistem îi corespunde în diagramă o variație liniară care se anulează pe ordonata centrului instantaneu absolut de rotație,

— înclinările dreptelor care mărginesc diagrama, față de linia de referință, reprezintă rotirile părților rigide,

— o ordonată a diagramei se calculează cu relația

În cele ce urmează, corpurile sistemului cinematic se notează cu I, II, III etc., centrele absolute cu $1p$, $2p$, $3p$ etc., iar centrele relative cu 12, 23, 13 etc.

Problema 6.1. Să se traseze diagramele de deplasări și să se calculeze rotirile corpurilor, funcție de rotirea ψ_1 , la mecanismul din figura 6.1.



Centrul absolut al corpului II se determină ca punct de intersecție a următoarelor două direcții, conform teoremei de coliniaritate a centrelor instantanee:

$$\begin{Bmatrix} 2p & 1p & 12 \\ 2p & 3p & 23 \end{Bmatrix} \rightarrow 2p$$

$$\begin{array}{ccc} 13 & 1p & 3p \\ 13 & 21 & 23 \end{array} \rightarrow 13$$

Din diagramele de deplasări rezultă:

$$\psi_1 = \psi_3, \quad \eta_1 = 3\psi_1, \quad \psi_2 = \frac{\eta_1}{4.5} = \frac{2}{3}\psi_1, \quad \eta = 6\psi_1, \quad \psi_2 = \frac{\eta}{y} = \frac{2}{3}\psi_1.$$

Centrul absolut al corpului II se află la intersecția direcției $1p - 12$, cu direcția perpendiculară pe planul de rezemare:

$$\begin{cases} 2p & 1p & 12 \\ 2p & \perp & \text{reazem} \end{cases} \rightarrow 2p$$

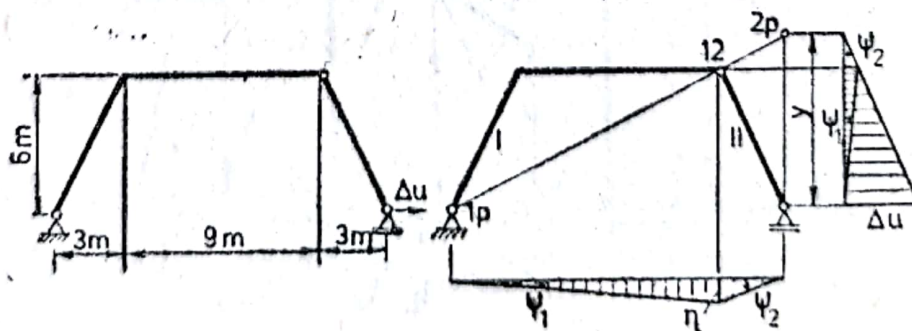
$$\frac{y}{15} = \frac{6}{12}, \quad y = 7,5 \text{ m.}$$


Fig. 6.2

Rezultă rotirile și deplasările :

$$\psi_2 = \frac{\Delta u}{7,5}, \quad \eta = 3\psi_2, \quad \psi_1 = \frac{\eta}{12} = \frac{\Delta u}{30}.$$

Observație. Deși corpul II este reprezentat de o bară cotică în diagrama de deplasări el apare ca o dreaptă.

Problema 6.3. Să se calculeze reacțiunea orizontală H_2 , la structura din figura 6.3, utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

Se transformă structura static determinată într-un mecanism cu un grad de libertate, prin îndepărtarea legăturii corespunzătoare reacțiunii orizontale și înlocuirea sa cu reacțiunea H_2 .

Structura este în echilibru sub acțiunea forțelor date și a reacțiunii H_2 , dar există posibilitatea unei deplasări virtuale.

Dând deplasarea $\eta = 1$, pe direcția reacțiunii H_2 , rezultă diagramele de deplasări din figură.

Condiția de lucru mecanic virtual este

$$30 \eta_3 + 10 \cdot 6 \eta_2 - H_2 \eta = 0.$$

$$\text{Deoarece } \eta_3 = \frac{1}{2}, \quad \psi_2 = \frac{1}{24}, \quad \eta_1 = \frac{1}{4}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2} \eta_1 = \frac{1}{8},$$

rezultă

$$H_2 = 22,5 \text{ kN.}$$

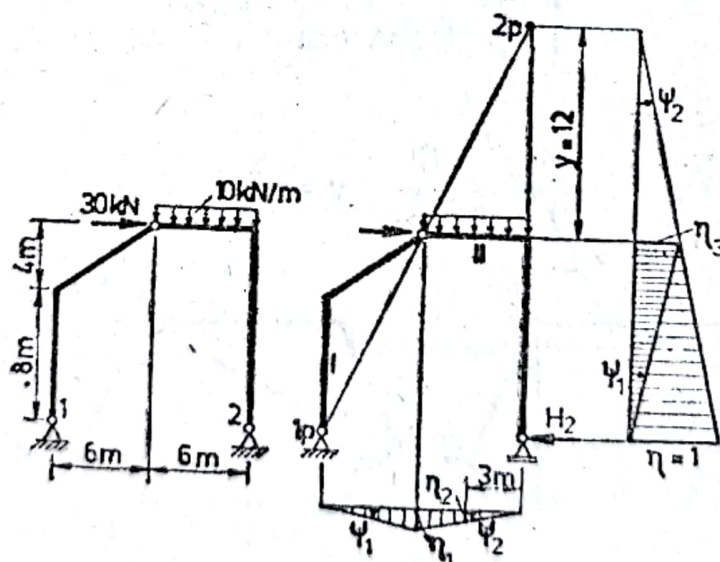


Fig. 6.3

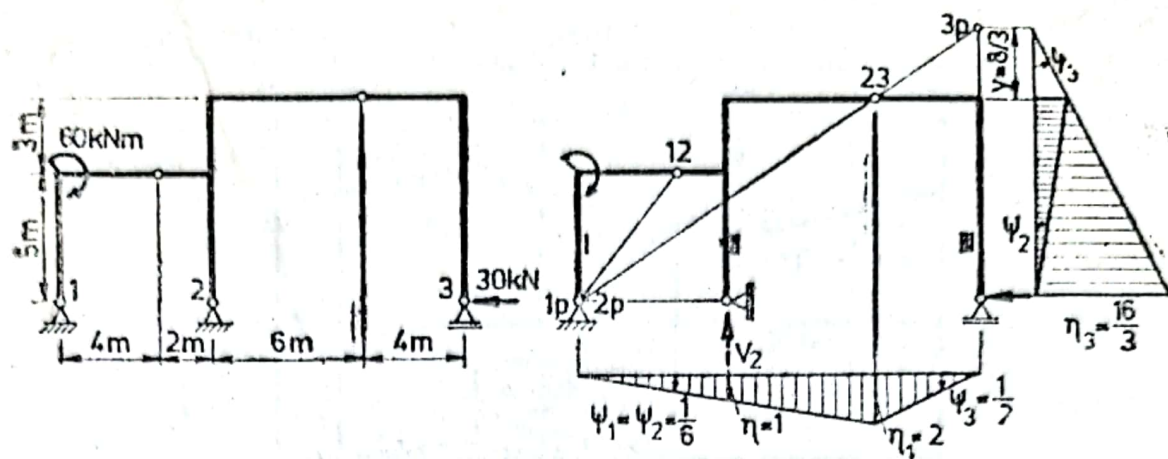


Fig. 6.4

Problema 6.4. Să se calculeze reacțiunea verticală V_2 , la structura din figura 6.4, utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

Se transformă structura în mecanism și se stabilește poziția centrelor instantanee. Se constată că centrele absolute $1p$ și $2p$ se află în același punct. Așa cum rezultă și din diagramele de deplasări consecința acestei situații este că rotirile celor două corpuri sînt egale, $\psi_1 = \psi_2$.

Condiția de lucru mecanic virtual este

$$-V_2 \eta + 60 \psi_1 - 30 \eta_3 = 0,$$

de unde, cu valorile deplasărilor indicate în figură, se obține

$$V_2 = -150 \text{ kN}.$$

Semnul (—) obținut pentru V_2 arată faptul că reacțiunea V_2 are sens invers sensului adoptat în calcul și indicat în figură.

Problema 6.5. Să se calculeze reacțiunea V_2 , momentul încovoietor M_1 și forța tăietoare T_{4-3} , la grinda Gerber din figura 6.5.

Calculul reacțiunii V_2

Se suprimă reazemul 2 și se înlocuiește cu reacțiunea V_2 . Cele trei corpuri care formează mecanismul au centrele absolute în secțiunile din dreptul reazemelor. Dînd deplasarea virtuală $\eta = 1$ pe direcția reacțiunii V_2 , se obține

$$-V_2 \eta + 2 \cdot 15 \eta_2 + 4 \cdot 15 \eta_3 + 60 \psi_3 = 0$$

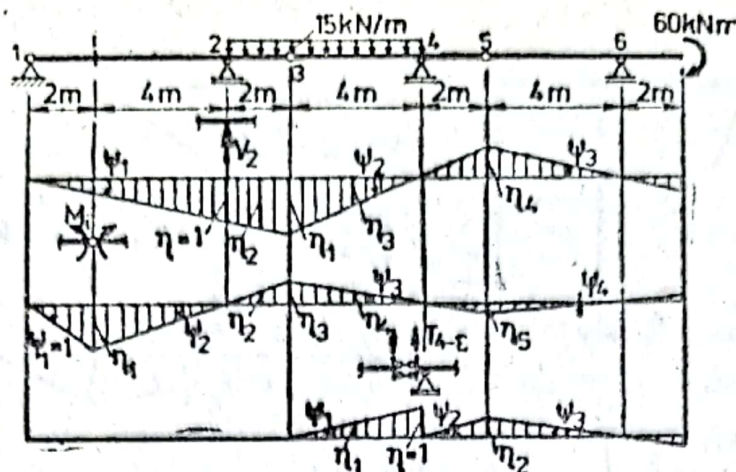


Fig. 6.5

Deoarece $\eta = 1$, rezultă: $\psi_1 = \frac{1}{6}$, $\eta_2 = \frac{7}{6}$, $\eta_1 = \frac{4}{3}$, $\eta_3 = \frac{1}{2}$, $\eta_1 = \frac{2}{3}$, $\eta_4 = \eta_3$ și $\psi_3 = \frac{1}{6}$. Înlocuind în expresia lucrului mecanic virtual, se obține reacțiunea $V_2 = 85$ kN.

Calculul momentului încovoietor

Întrerupînd continuitatea în secțiunea i rezultă patru corpuri care au centrele absolute în secțiunile din dreptul reazemelor, iar centrele relative în articulațiile interioare. Dînd primului corp rotirea $\psi_1 = 1$, rezultă

$$-M_i \psi_1 - M_i \psi_2 - 2 \cdot 15 \eta_2 - 4 \cdot 15 \eta_4 - 60 \psi_4 = 0.$$

Deoarece $\psi_1 = 1$, rezultă succesiv: $\eta_1 = 2$, $\psi_2 = \frac{1}{2}$, $\eta_2 = \frac{1}{2}$, $\eta_3 = 1$, $\eta_4 = \frac{1}{2}$, $\psi_3 = \frac{1}{4}$, $\eta_5 = \frac{1}{2}$, $\psi_4 = \frac{1}{8}$. Înlocuind în expresia lucrului mecanic virtual, se obține $M_i = -35$ kNm.

Calculul forței tăietoare

Secțiunea fiind în stînga reazemului 4, se introduce mecanismul corespunzător, așa cum s-a reprezentat pe desen. Corpurile legate prin acest mecanism vor fi paralele și în poziția deplasată (fapt aceasta este cheia problemei).

Prima grindă (1-2-3) fiind grindă principală și rămînînd toate legăturile inițiale, este un corp fix.

Dînd deplasarea virtuală $\eta = 1$ pe direcția forței tăietoare, se obține

$$-T_{4-\varepsilon} \eta - 4 \cdot 15 \eta_1 + 60 \psi_3 = 0.$$

Deoarece $\eta = 1$, rezultă: $\eta_1 = \frac{1}{2}$, $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{4}$, $\eta_2 = \frac{1}{2}$,
 $\psi_3 = \frac{1}{8}$, cu care

$$T_{4-\varepsilon} = -22,5 \text{ kN.}$$

Observație. Semnul $(-)$ obținut atât în calculul momentului încovoietor cât și al forței tăietoare, indică faptul că în realitate aceste eforturi au sens invers sensului adoptat inițial și reprezentat în desen.

Problema 6.6. Să se calculeze reacțiunea V_3 , momentul încovoietor din încastrare M_1 și forța tăietoare $T_{3+\varepsilon}$ la grinda Gerber din figura 6.6.

Calculul reacțiunii V_3

$$-V_3 \eta - 30 \cdot 2 \eta_3 = 0, \quad V_3 = -15 \text{ kN.}$$

Calculul momentului încovoietor M_1

$$M_1 \psi_1 + 10 \cdot 8 \eta_1 + 30 \cdot 2 \eta_4 = 0, \quad M_1 = -360 \text{ kNm.}$$

Calculul forței tăietoare $T_{3+\varepsilon}$

$$-T_{3+\varepsilon} \eta_1 - 30 \cdot 2 \eta_2 = 0, \quad T_{3+\varepsilon} = -10 \text{ kN.}$$

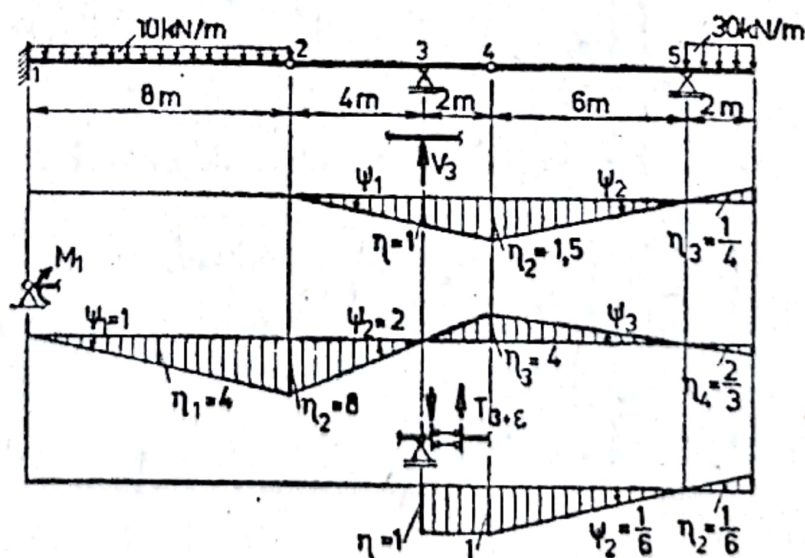


Fig. 6.6

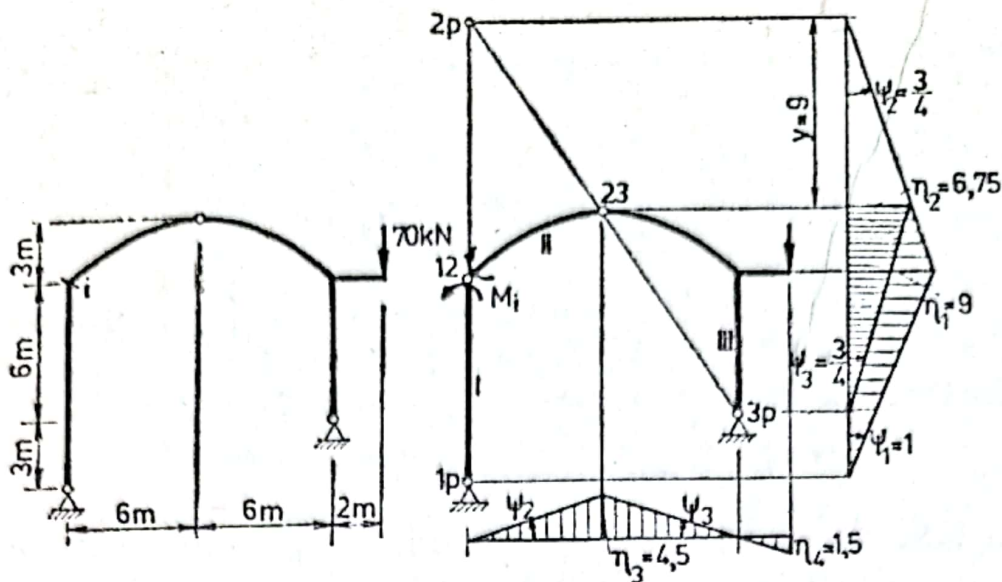


Fig. 6.7

Problema 6.7. Să se calculeze momentul încovoietor M_i , la structura din figura 6.7, utilizînd principiul lucrului mecanic virtual. Calculul momentului încovoietor M_i

$$-M_i \psi_1 - M_i \psi_2 + 70 \eta_4 = 0, \quad M_i = 60 \text{ kN}.$$

Problema 6.8. Pentru structura din aplicația precedentă să se determine forța tăietoare din secțiunea i , pe stîlp (fig. 6.8).

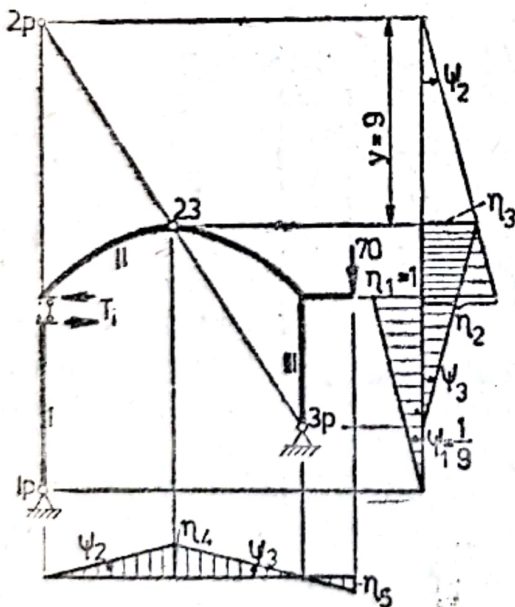


Fig. 6.8

În această deplasare virtuală corpurile I și II sînt paralele, deci $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{9}$.

Celelalte deplasări sînt:

$$\eta_2 = \frac{4}{3}, \quad \eta_3 = 1, \quad \psi_3 = \frac{1}{9} \text{ și } \eta_5 = \frac{2}{9}.$$

Condiția de lucru mecanic virtual este

$$-T_i \eta_1 - T_i \eta_2 + 70 \eta_5 = 0,$$

iar

$$T_i = 6,67 \text{ kN}.$$

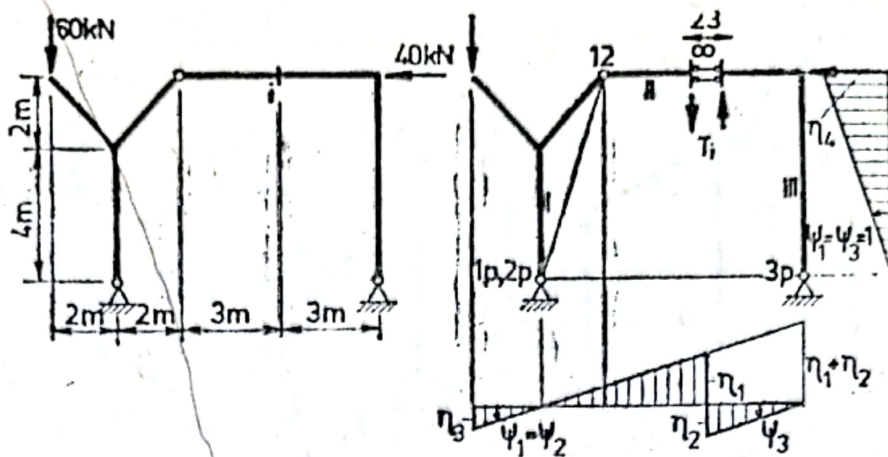


Fig. 6.9

Problema 6.9. Să se calculeze forța tăietoare din secțiunea i , la structura din figura 6.9.

Centrul relativ 23 fiind la infinit pe orizontală, rezultă că în poziția deplasată corpurile II și III vor fi paralele, deci $\psi_2 = \psi_3$. Alegînd $\psi_3 = 1$ se obține: $\eta_1 = 5$, $\eta_2 = 3$, $\eta_3 = 2$, $\eta_4 = 6$.

Condiția de lucru mecanic virtual conduce la următorul rezultat

$$-T_i \eta_1 - T_i \eta_2 + 60 \eta_3 + 40 \eta_4 = 0 \text{ și } T_i = 45 \text{ kN.}$$

Dacă s-ar alege deplasarea totală pe direcția forței tăietoare egală cu unitatea ($\eta = \eta_1 + \eta_2 = 1$), atunci s-ar obține $\eta_3 = \frac{1}{4}$,

$$\eta_4 = \frac{3}{4} \text{ și în continuare}$$

$$-T_i \eta + 60 \eta_3 + 40 \eta_4 = 0, \quad T_i = 45 \text{ kN.}$$

Problema 6.10. Să se calculeze momentul încovoietor din secțiunea i , la structura din figura 6.10.

Centrul absolut al corpului III fiind la infinit rezultă că, în deplasarea virtuală dată, el se translatează ($\psi_3 = 0$).

$$\text{Considerînd } \eta = 1, \text{ rezultă: } \psi_2 = \frac{1}{12}, \quad \psi_4 = \frac{1}{8}, \quad \eta_1 = \frac{2}{3},$$

$$\psi_1 = \frac{1}{6}, \quad \eta_2 = 3.$$

Condiția de lucru mecanic virtual

$$-N_S \delta_N - 90 \eta_1 + 30 \eta_3 = 0,$$

$$N_S = -20 \text{ kN}.$$

Calculul efortului din talpa inferioară

Pentru $\delta_N = 1$, rezultă: $\eta = 3$,

$$\psi_2 = \frac{1}{4}, \quad \eta_2 = \frac{3}{2}, \quad \psi_1 = \frac{1}{4},$$

$$\eta_1 = 1, \quad \eta_3 = 1.$$

Condiția de lucru mecanic virtual nul se scrie

$$-N_t \delta_N + 90 \eta_1 - 30 \eta_3 = 0,$$

$$N_t = 60 \text{ kN}.$$

Problema 6.12. Să se calculeze efortul din bara indicată, la grinda cu zăbrele din figura 6.12.

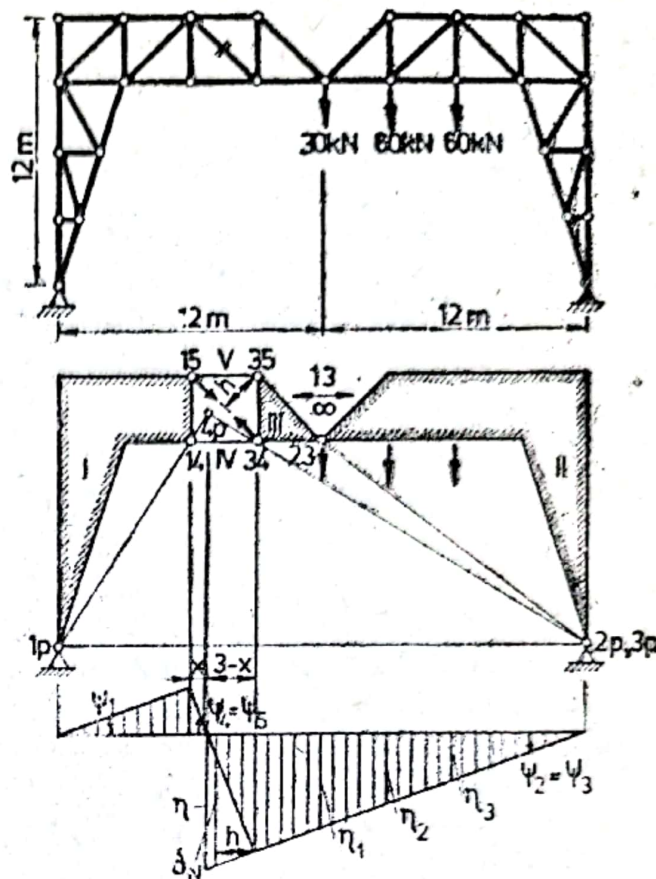


Fig. 6.12

Determinarea poziției centrelor instantanee de rotație:

$$\begin{cases} 13 & 15 & 35 \\ 13 & 14 & 34 \end{cases} \rightarrow 13$$

$$\begin{cases} 3p & 23 & 2p \\ 3p & 13 & 1p \end{cases} \rightarrow 3p$$

$$\begin{cases} 4p & 14 & 1p \\ 4p & 34 & 3p \end{cases} \rightarrow 4p$$

Poziția centrului absolut 4p față de cele două noduri vecine se obține astfel:

$$\frac{x}{6+x} = \frac{3-x}{18-x}, \quad x = 0,75 \text{ m}$$

$$h = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 2,10 \text{ m}$$

$$\frac{\delta_N}{h} = \frac{\eta}{3-x}, \quad \eta = \frac{2,75 \delta_N}{h}.$$

Pentru $\delta_N = 1$, rezultă: $\eta = 1,31$, $\eta_1 = 0,89$, $\eta_2 = 0,666$, $\eta_3 = 0,445$.

Condiția de lucru mecanic virtual nul este

$$-N \delta_N + 30 \eta_1 + 60 \eta_2 + 60 \eta_3 = 0, \quad N = 93,4 \text{ kN}.$$

Capitolul VII

LINII DE INFLUENȚĂ LA STRUCTURI STATIC DETERMINATE

Capitolele precedente au fost consacrate calculului eforturilor ce iau naștere în diferitele secțiuni ale structurilor static determinate, când acestea sînt acționate de încărcări fixe. În construcții însă apar și forțe mobile (convoaie de forțe), care conduc la variate posibilități de încărcare. Fiecare poziție a forțelor face ca într-o secțiune să se dezvolte eforturi cu anumite valori. De aceea se pune problema ca, fiind dată o secțiune, să se găsească situația cea mai defavorabilă pentru un anumit efort, în funcție de poziția încărcării mobile, iar apoi să se calculeze mărimea efortului respectiv. Problema se rezolvă cu ajutorul liniilor de influență.

Fiind dată o grindă simplu rezemată încărcată cu două forțe mobile P_1 și P_2 , care la un moment dat acționează în punctele a și b (fig. VII.1, a), un efort oarecare S_i , din secțiunea i , se poate exprima ca sumă a efectelor produse de cele două forțe,

$$S_i^{(1)} = P_1 s_{ia} + P_2 s_{ib}. \quad (\text{VII.1})$$

Semnificația coeficienților s_{ia} și s_{ib} se obține prin particularizare. Astfel, dacă $P_1 = 1$ și $P_2 = 0$, rezultă $S_i^{(1)} = 1 \cdot s_{ia}$, adică s_{ia} este efortul care ia naștere în secțiunea i când în secțiunea a acționează, după direcția lui P_1 , o forță egală cu unitatea.

Dacă se consideră o nouă poziție a sistemului de forțe (fig. VII.1, b), efortul S_i are expresia

$$S_i^{(2)} = P_1 s_{ic} + P_2 s_{id}. \quad (\text{VII.2})$$

În general forțele sînt verticale și pot ocupa diferite poziții pe linia de

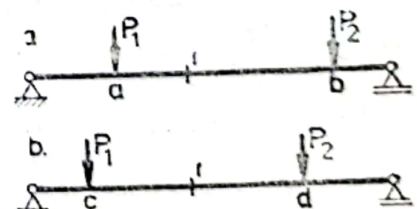


Fig. VII.1

încărcare a construcției. De aceea, este necesară cunoașterea efortului din secțiunea i pentru orice poziție a forței $P_j = 1$. Dacă admitem că într-un mod oarecare s-a calculat S_i și se reprezintă în dreptul forței-unitate valoarea obținută, considerînd o linie de referință ce corespunde cu linia de încărcare, curba descrisă prin deplasarea forței $P_j = 1$ reprezintă linia de influență a efortului S_i . Deci, linia de influență a unui efort dintr-o anumită secțiune este o diagramă ale cărei ordonate reprezintă modul de variație al efortului, cînd o forță-unitate se deplasează pe linia de încărcare a structurii.

Este necesar să se rețină diferența esențială ce există între o diagramă de efort și o linie de influență. Pe cînd ordonata din secțiunea a a diagramei de efort reprezintă efortul din acea secțiune datorită unei încărcări fixe, ordonata din secțiunea a a liniei de influență reprezintă efortul din secțiunea i datorită încărcării cu o forță-unitate aplicată în a .

Ordonatele s_{ia} , s_{ib} , ... se numesc coeficienți de influență, se notează cu litere mici — întrucît reprezintă efectele unor cauze unitate — și poartă doi indici; primul indice arată locul unde se produce efortul, iar al doilea arată locul în care acționează forța egală cu unitatea.

Determinarea liniilor de influență se poate face utilizînd metoda analitică sau metoda cinematică (folosind principiul lucrului mecanic virtual), corespunzător celor două posibilități de exprimare a condiției de echilibru static.

În metoda analitică se scrie expresia mărimii statice în funcție de poziția forței-unitate și se pun condiții asupra variabilei (care reprezintă poziția forței-unitate).

În metoda cinematică, adoptată mult mai frecvent, se utilizează principiul lucrului mecanic virtual. Modalitatea practică de rezolvare constă în următoarele:

- se construiește diagrama deplasărilor virtuale pentru mecanismul obținut prin suprimarea legăturii simple corespunzătoare mărimii statice studiate,

- atașînd acestei diagrame de deplasări o scară, în raport de care se poate determina deplasarea oricărei secțiuni, și un semn, stabilit printr-o anumită convenție, se obține linia de influență a mărimii statice studiate.

Forțele ce acționează structura sînt S_i și $P_j = 1$, deci condiția de lucru mecanic virtual nul este

$$S_i \delta_s + 1 \cdot \delta_p = 0, \quad (\text{VII.3})$$

unde δ_s este deplasarea corespunzătoare lui S_i (după direcția lui),

iar δ_p este deplasarea punctului de aplicație al forței $P_j = 1$ (după direcția ei).

Dacă deplasării δ_s i se atribuie valoarea 1 (lucru posibil deoarece este o deplasare arbitrară) și se alege astfel încît lucrul mecanic $S_i \delta_s$ să fie negativ, rezultă

$$S_i = 1 \cdot \delta_s. \quad (\text{VII.4})$$

Ecuația (VII.4) reprezintă ecuația generală a liniilor de influență pentru structuri static determinate și se interpretează astfel: linia de influență a efortului S_i este dată de diagrama deplasărilor liniei de încărcare a sistemului transformat, după direcția forței $P_j = 1$, cînd pe direcția efortului S_i s-a dat deplasarea $\delta_s = 1$, astfel încît lucrul mecanic $S_i \delta_s$ să fie negativ. Ecuația indică în același timp și semnul, prin faptul că $1 \cdot \delta_s$ este un lucru mecanic (cînd deplasările δ_s sînt în sensul forței $P_j = 1$, $1 \cdot \delta_s$ este pozitiv).

Caracteristica liniilor de influență la structuri static determinate este aceea că ele sînt reprezentate prin diagrame cu variații liniare.

Utilitatea liniilor de influență constă în aceea că se poate, cu ajutorul lor, stabili valoarea mărimii statice studiate pentru orice poziție a sistemului de forțe mobile, prin relații de tipul (VII.1) sau se poate determina valoarea maximă a mărimii statice produsă de un sistem de forțe mobile.

Elementele prezentate anterior au o valabilitate generală, dar pentru grinzile cu zăbrele apar unele particularități în aplicare și anume:

- trebuie precizată talpa pe care se deplasează forța-unitate,
- scara liniei de influență se stabilește pe baza relației

$$\psi_{12} = \frac{\delta_s}{h} = \frac{1}{h}, \quad (\text{VII.5})$$

unde h și $\delta_s = NN_2 = 1$ sînt reprezentate în figura VII.2, b.

Deoarece unghiul de rotire relativă ψ_{12} , dintre corpurile asupra cărora acționează eforturile S_i , apare totdeauna în diagrama de deplasări, iar h este cunoscut, se pot determina cu ușurință ordonatele liniei de influență.

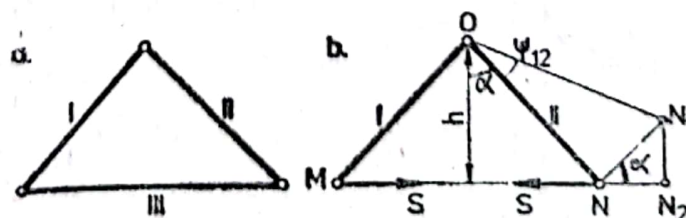


Fig. VII.2

APLICAȚII

A. GRINDA DREAPTĂ ȘI SISTEME DE GRINZI DREPTE

1. Metoda analitică.

Problema 7.1. Să se traseze liniile de influență ale reacțiunilor V_1 , V_2 , la grinda simplu rezemată din figura 7.1.

Linia de influență a reacțiunii V_1 .

Expresia reacțiunii V_1 este

$$V_1 l - 1 \cdot b = 0, \quad V_1 = \frac{1 \cdot b}{l}.$$

Din condițiile la limită asupra variabilei b se obține:

- pentru $b = 0$, $V_1 = 0$
- pentru $b = l$, $V_1 = 1$.

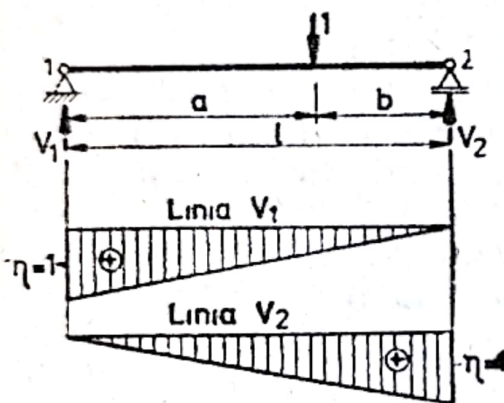


Fig. 7.1

Deoarece în expresia reacțiunii variabila b este la puterea întâia rezultă că linia de influență este o diagramă cu variație liniară. Semnul plus atestă faptul că reacțiunea V_1 are sensul adoptat în figură.

Linia de influență a reacțiunii V_2 .

Expresia reacțiunii V_2 este

$$1 \cdot a - V_2 l = 0, \quad V_2 = \frac{1 \cdot a}{l}.$$

Condițiile la limită sînt:

- pentru $a = 0$, $V_2 = 0$
- pentru $a = l$, $V_2 = 1$.

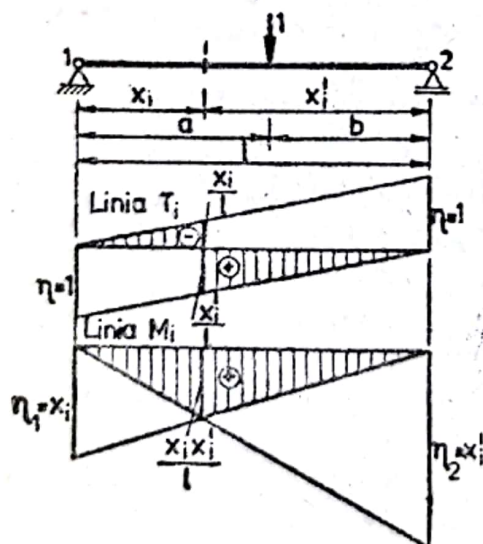


Fig. 7.2

Problema 7.2. Să se traseze liniile de influență ale forței tăietoare și momentului încovoietor, din secțiunea i , la grinda simplu rezemată din figura 7.2.

Pentru trasarea ambelor linii de influență se vor analiza câte două situații și anume forța de 1 kN se află la dreapta sau la stînga secțiunii i .

Linia de influență a forței tăietoare T_i .

În cazul în care forța unitate se află în dreapta secțiunii i ,

$$T_i = V_1 = \frac{1 \cdot b}{l};$$

— pentru $b = 0$, $V_1 = 0$ și $T_i = 0$

— pentru $b = x'_i$, $V_1 = \frac{x'_i}{l}$, $T_i = \frac{x'_i}{l}$.

În cazul în care forța unitate se află în stînga secțiunii i ,

$$T_i = V_1 - 1 = -V_2 = -\frac{1 \cdot a}{l};$$

— pentru $a = 0$, $V_2 = 0$ și $T_i = 0$

— pentru $a = x_i$, $V_2 = -\frac{x_i}{l}$, $T_i = -\frac{x_i}{l}$.

Cele două ramuri ale liniei de influență sînt paralele deoarece prelungindu-le, în secțiunile de pe reazeme se obține ordonata $\eta = 1$, aceeași ca în secțiunea i .

Linia de influență a momentului încovoietor M_i .

Forța unitate se află în dreapta secțiunii i ,

$$M_i = V_1 x_i = \frac{1 \cdot b}{l} x_i;$$

— pentru $b = 0$, $M_i = 0$

— pentru $b = x_i$, $M_i = \frac{x_i x'_i}{l}$.

Forța unitate se află în stînga secțiunii i ,

$$M_i = V_2 x_i = \frac{1 \cdot a}{l} x'_i;$$

— pentru $a = 0$, $M_i = 0$

— pentru $a = x_i$, $M_i = \frac{x_i x'_i}{l}$.

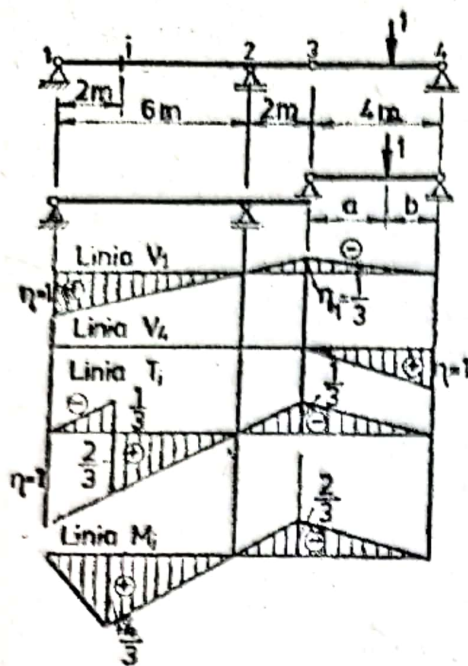


Fig. 7.3

Prelungind cele două ramuri ale liniei de influență pînă în dreptul reazemelor se obțin ordonatele x_1 și x'_1 .

Problema 7.3. Să se traseze liniile de influență ale reacțiunilor V_1 , V_4 , forței tăietoare T_1 și momentului încovoietor M_1 la grinda Gerber din figura 7.3.

Linia de influență V_1 .

Cît timp forța unitate se află pe grinda principală, linia de influență are aceeași alură ca în problema 8.1.

Dacă forța unitate acționează pe grinda secundară 3—4, rezultă următoarea expresie pentru reacțiunea V_1 ,

$$V_1 = -V_3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1 \cdot b}{4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1 \cdot b}{12}.$$

Din condițiile la limită se obține:

- pentru $b = 0$, $V_3 = 0$, $V_1 = 0$
- pentru $b = 4$, $V_3 = 1$, $V_1 = -\frac{1}{3}$.

Cu aceste valori s-a trasat linia de influență a reacțiunii V_1 .

Linia de influență V_4 .

$$\Sigma M_3 = 0, V_4 \cdot 4 - 1 \cdot a = 0, V_4 = \frac{1 \cdot a}{4}.$$

Din condițiile la limită rezultă:

- pentru $a = 0$, $V_4 = 0$
- pentru $a = 4$, $V_4 = 1$.

Linia de influență T_1 .

Dacă forța unitate se află în dreapta secțiunii i , forța tăietoare $T_1 = V_1$, deci linia de influență T_1 are aceeași alură și aceleași valori ca și linia V_1 .

Dacă forța unitate se află în stînga secțiunii i , forța tăietoare T_i are expresia $T_i = V_1 - 1 = -V_2$. La limită:

- pentru forța unitate în punctul 1, $T_i = 0$,
- pentru forța unitate în secțiunea i , $T_i = -\frac{1}{3}$.

Linia de influență M_i .

Dacă forța unitate se află în dreapta secțiunii i , momentul încovoietor are expresia $M_i = V_1 \cdot 2$. La limită:

- pentru forța unitate în punctul 3, $M_i = -\frac{2}{3}$,
- pentru forța unitate în secțiunea i , $M_i = \frac{4}{3}$.

Se constată că atît timp cît forța unitate se află pe grinda principală 1 — 2, rezultă aceeași linie de influență ca în cazul grinzii drepte studiate la problema 7.1.

2. Metoda cinematică.

Problema 7.4. Să se traseze liniile de influență ale reacțiunii V_1 , forței tăietoare $T_{2-\varepsilon}$ și momentului încovoietor M_2 , la grinda Gerber din figura 7.4.

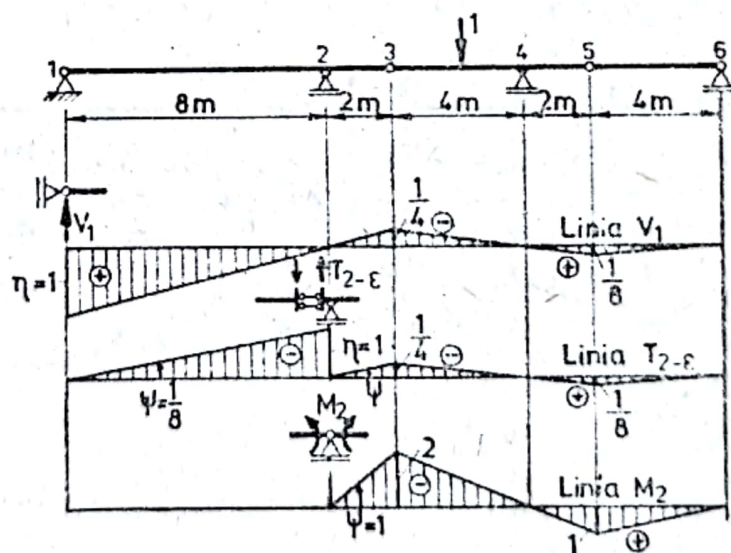


Fig. 7.4

Linia de influență V_1 .

Se suprimă legătura corespunzătoare reacțiunii V_1 și se obține un mecanism cu un grad de libertate. Dînd deplasarea $\eta = 1$ în sens invers sensului de acțiune a reacțiunii V_1 , rezultă diagrama de deplasări cu valori zero în dreptul reazemelor simple 2, 4 și 6.

Scriind condiția de echilibru static $S\delta_s + 1 \cdot \delta_p = 0$, deoarece $S = V_1$, $\delta_s = \eta = -1$, rezultă $V_1 = \delta_p$.

Scara liniei de influență este $\eta = 1$, iar semnul este cel al deplasării punctului de aplicație al forței unitate; „plus” cînd se produce deplasarea în sensul de acțiune al forței unitate, „minus” dacă deplasarea are loc în sens invers sensului de acțiune al forței unitate.

Linia de influență T_{2-3} .

Secțiunea se află în stînga reazemului. Mecanismul introdus menține paralele cele două tronsoane și după deplasare. De remarcat că secțiunea de pe reazem are deplasare zero pe verticală, dar se poate roti.

Linia de influență M_2 .

Mecanismul reprezentat în figura 7.4 arată faptul că s-a întrerupt continuitatea grinzii exact în secțiunea din dreptul reazemului 2. În consecință, grinda 1 — 2 este o grindă simplu rezemată, deci fixă și ca atare deplasarea $\delta_s = -1$, care este o rotire, va fi efectuată de tronsonul 2—3 al grinzii inițiale.

Problema 7.5. Să se traseze liniile de influență ale reacțiunii V_4 , momentului încovoietor M_1 și forței tăietoare T_1 la grinda Gerber din fig. 7.5.

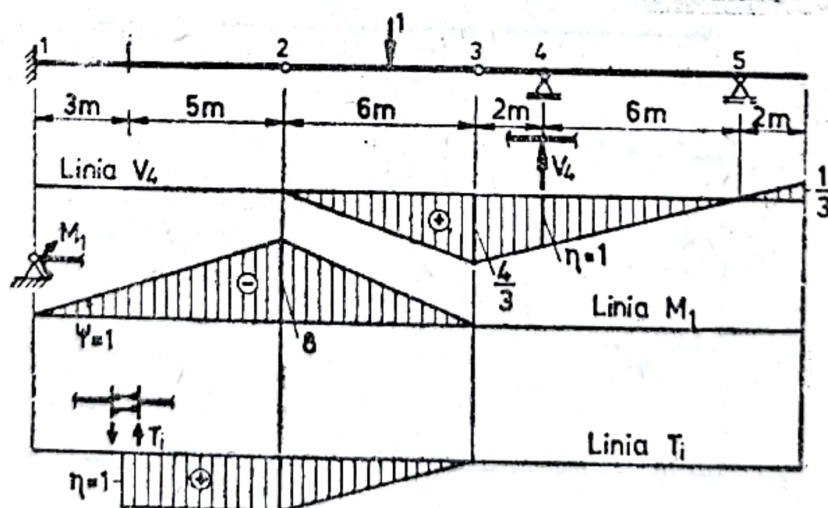


Fig. 7.5

Pentru trasarea liniei de influență a momentului încovoietor M_1 se transformă încastrarea din capătul 1 în articulație și se încarcă cu M_1 . Mecanismul este parțial și este format din grinzile 1 — 2 și 2 — 3; grinda 3—4—5 este grindă principală și deci fixă (deoarece nu s-a intervenit asupra nici uneia dintre legăturile sale).

La trasarea liniei de influență a forței tăietoare T_i se constată că tronsonul 1 — i rămîne fix, iar tronsonul i — 2 se deplasează paralel cu el însuși. Grinda 3—4—5 este de asemenea fixă.

Problema 7.6. Să se traseze liniile de influență ale forțelor tăietoare $T_{2-\epsilon}$, $T_{2+\epsilon}$ și momentului încovoietor M_4 , la grinda Gerber din figura 7.6.

În cazul mecanismului obținut prin suprimarea legăturii corespunzătoare forței tăietoare $T_{2+\epsilon}$ se observă că grinda 1—2 rămîne fixă, iar tronsonul 2—3 se deplasează paralel el însuși, cu deplasarea $\eta = 1$.

În cazul mecanismului obținut prin suprimarea legăturii corespunzătoare momentului încovoietor M_4 , grinda 1—2—3 și grinda 3—4 rămîn fixe.

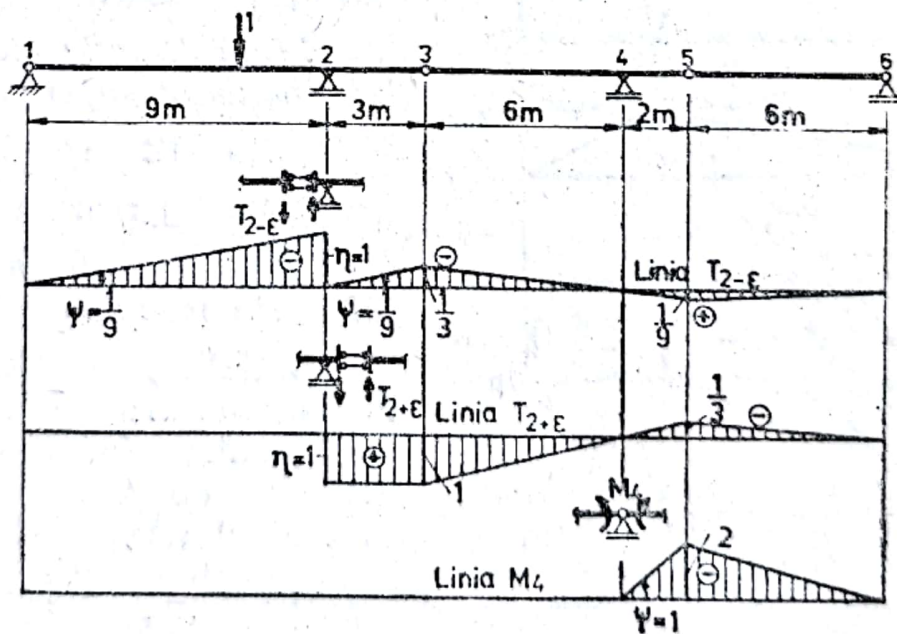


Fig. 7.6

Problema 7.7. Să se traseze liniile de influență ale eforturilor din barele indicate ale grinzilor cu zăbrele date.

Linia de influență a efortului din diagonala D.

$$\begin{cases} 12 & 14 & 24 \\ 12 & 13 & 23 \end{cases} \rightarrow 12$$

$$\begin{cases} 2p & 12 & 1p \\ 2p & \perp & \text{reazem} \end{cases} \rightarrow 2p$$

$$\begin{cases} 4p & 14 & 1p \\ 4p & 24 & 2p \end{cases} \rightarrow 4p$$

$$\begin{cases} 34 & 14 & 13 \\ 34 & 24 & 23 \end{cases} \rightarrow 34$$

$$\begin{cases} 3p & 13 & 1p \\ 3p & 34 & 4p \end{cases} \rightarrow 3p$$

Deoarece centrul relativ 12 se află la infinit pe orizontală, rezultă că cele două corpuri, I și II, vor fi paralele în diagrama de deplasări.

Linia de influență a efortului din talpa superioară S.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2p \quad 12 \quad 1p \\ 2p \quad \perp \text{ reazem} \end{array} \right. \rightarrow 2p$$

Linia de influență a efortului din montantul M.

Stabilirea poziției centrelor instantanee urmează aceeași cale ca și pentru efortul din diagonală. De observat în acest caz că centrul relativ 34 se află la infinit pe o direcție paralelă cu cele două diagonale ce delimitează corpurile I la dreapta și II la stînga.

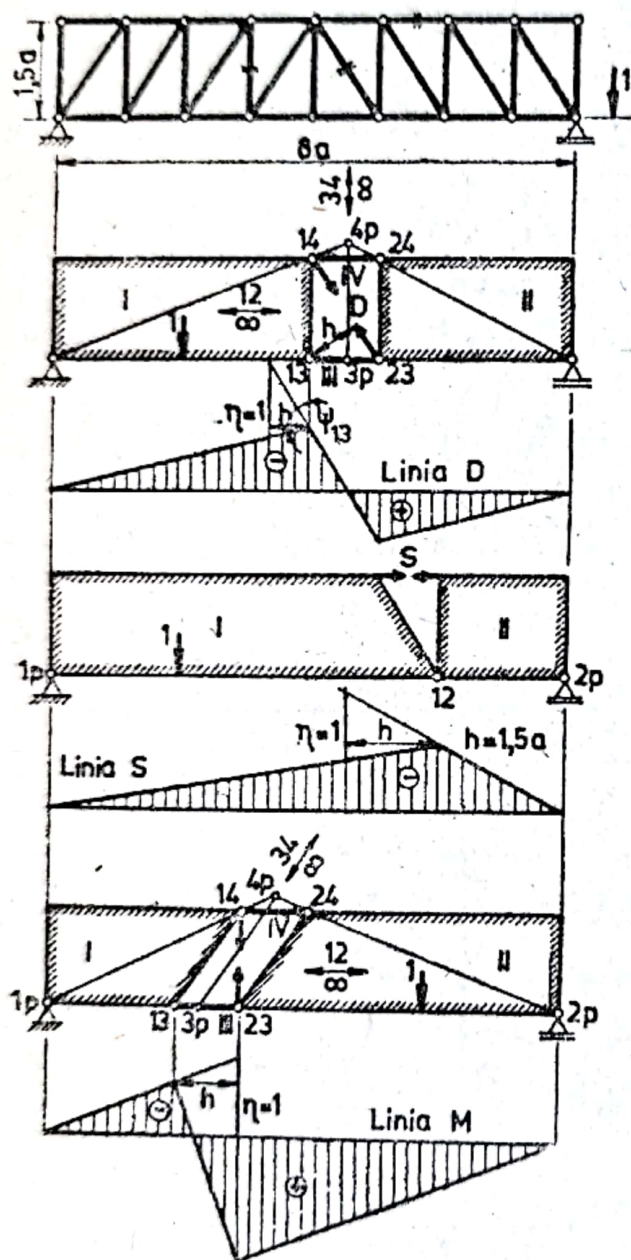


Fig. 7.7

Problema 7.8.

Linia de influență a efortului din talpa superioară S.

Corpul I este fix, deci articulația dintre cele două corpuri este centrul absolut al corpului II, $2p$.

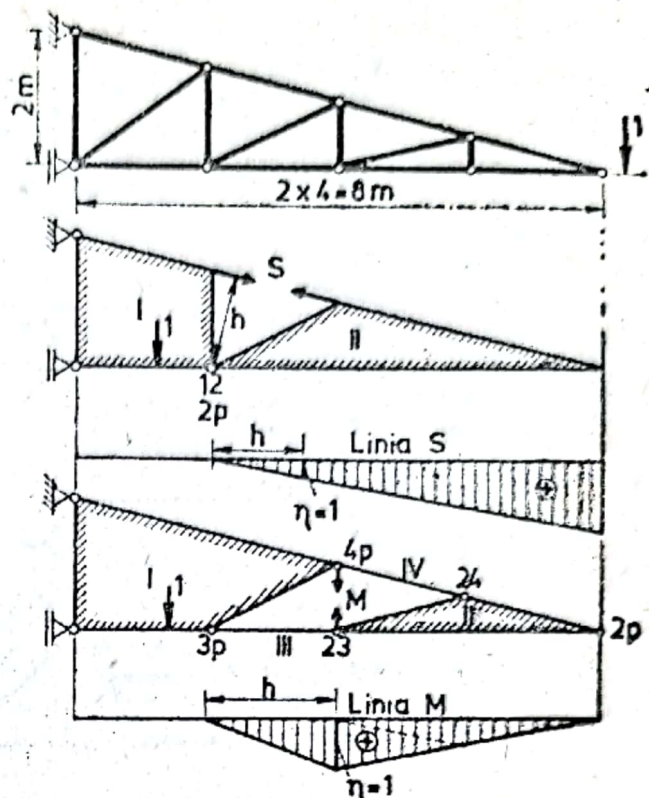
Linia de influență a efortului din montantul M.

În acest caz corpul I este fix.

Centrul absolut al corpului II rezultă chiar în capătul liber al consolei.

Dacă forța unitate s-ar deplasa pe talpa superioară linia de influență a efortului din montant ar fi delimitată, spre stînga, de linia punctată.

Comparînd cele două situații se pot trage concluzii asupra variației mărimii efortului din montant.



[Fig. 7.8

Problema 7.9.

Linia de influență M_{12} :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 14 & 12 & 24 \\ 14 & 13 & 34 \end{cases} \rightarrow 14 \\ & \begin{cases} 23 & 12 & 13 \\ 23 & 24 & 34 \end{cases} \rightarrow 23 \\ & \begin{cases} 3p & 13 & 1p \\ 3p & 23 & 2p \end{cases} \rightarrow 3p \\ & \begin{cases} 4p & 14 & 1p \\ 4p & 24 & 2p \end{cases} \rightarrow 4p \end{aligned}$$

Din cele de mai sus rezultă:

— corpul I este fix (centrul relativ 13 se confundă cu centrul absolut $3p$, deci corpul I are două puncte fixe),

— corpul II este fix (centrul relativ 12 este fix, centrul relativ 24 se confundă cu centrul absolut $4p$, deci corpul II are două puncte fixe).

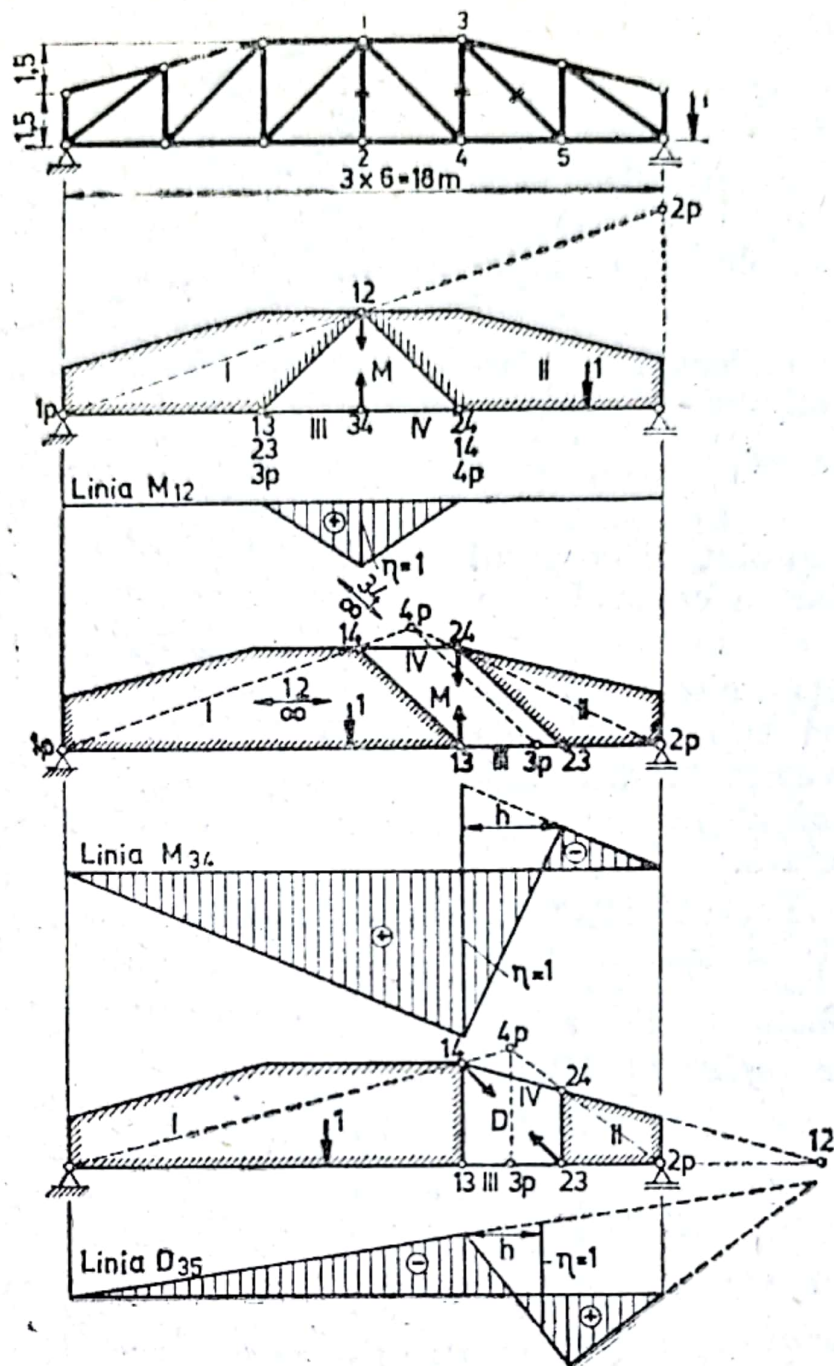


Fig. 7.9

Linia de influență M_{34} .

Centrul relativ 12 se află la infinit pe orizontală, iar centrul relativ 34 se află la infinit pe o direcție paralelă cu diagonalele 14 și 35.

Linia de influență D_{35} .

Corpurile I și II au deplasare egală în dreptul centrului relativ 12, deci cele două direcții se intersectează pe verticala acestui centru.

Problema 7.10.

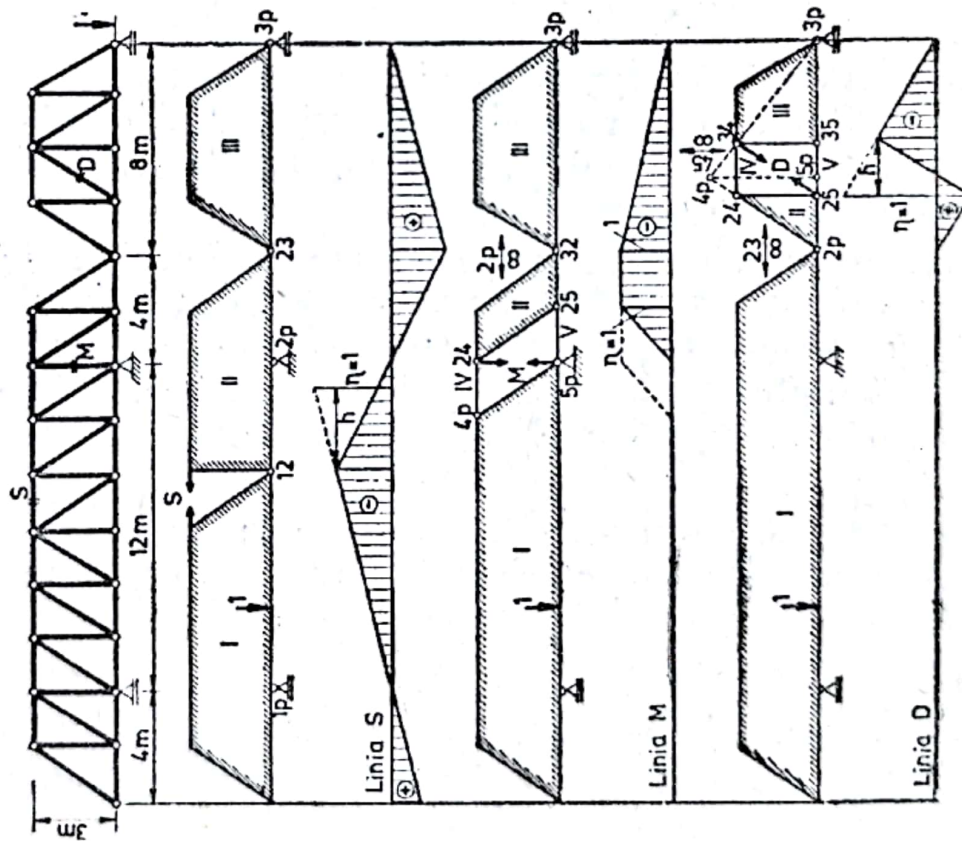


Fig. 7.10

Problema 7.11.

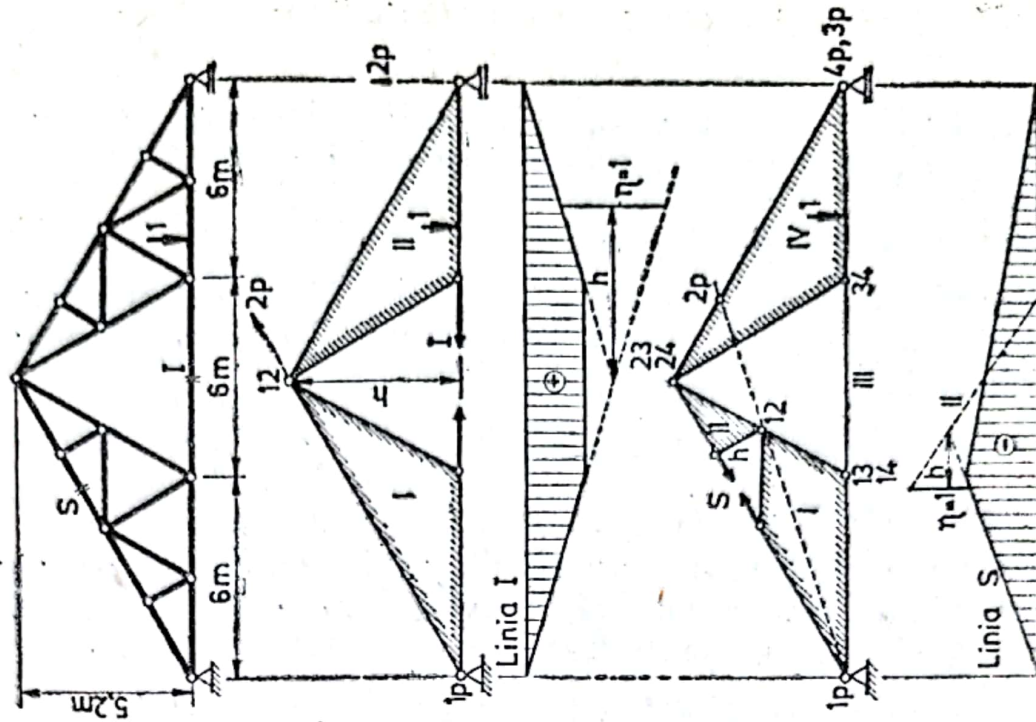


Fig. 7.11

Problema 7.12. Să se traseze liniile de influență ale reacțiunilor V'_1 și H'_1 la arcul cu trei articulații din fig. 7.12.

Linia de influență V'_1

Deoarece centrele absolute $1p$ și $2p$ se află în același punct rezultă că pozițiile deplasate ale corpurilor I și II formează același unghi și se confundă.

Scara $\eta = 1$ apare direct în diagrama de deplasări.

Linia de influență H'_1

Deplasarea unitate nu apare direct în diagrama de deplasări, în schimb apare rotirea relativă θ_{12}^{rel} a celor două corpuri. Între rotirea relativă și deplasarea unitate există relația

$$\theta_{12}^{rel} f' = 1.$$

Ordonata maximă rezultă

$$\eta = \frac{xx'}{f'l}.$$

Problema 7.13. Să se traseze liniile de influență ale reacțiunilor H_1 și V_1 la arcul cu trei articulații din figura 7.13; și să se analizeze rezultatele obținute comparativ cu cele din aplicația precedentă.

Linia de influență V_1 se deosebește de linia de influență V'_1 , trasată la aplicația precedentă, prin aceea că pozițiile deplasate ale celor două corpuri nu mai sînt confundate.

Linia de influență H_1 diferă de linia de influență H'_1 numai prin valoarea unghiului de rotire relativă θ_{12}^{rel} care în acest caz este $\theta_{12}^{rel} d = 1$.

Problema 7.14. Să se traseze linia de influență a reacțiunii H_2 și a momentului încovoietor din secțiunea i la arcul cu trei articulații din figura 7.14.

Linia de influență M_i .

Rotirea relativă dintre corpurile I și II fiind egală cu unitatea, se pot obține ordonatele liniei de influență dacă se cunoaște poziția centrului absolut $2p$, respectiv l_2 .

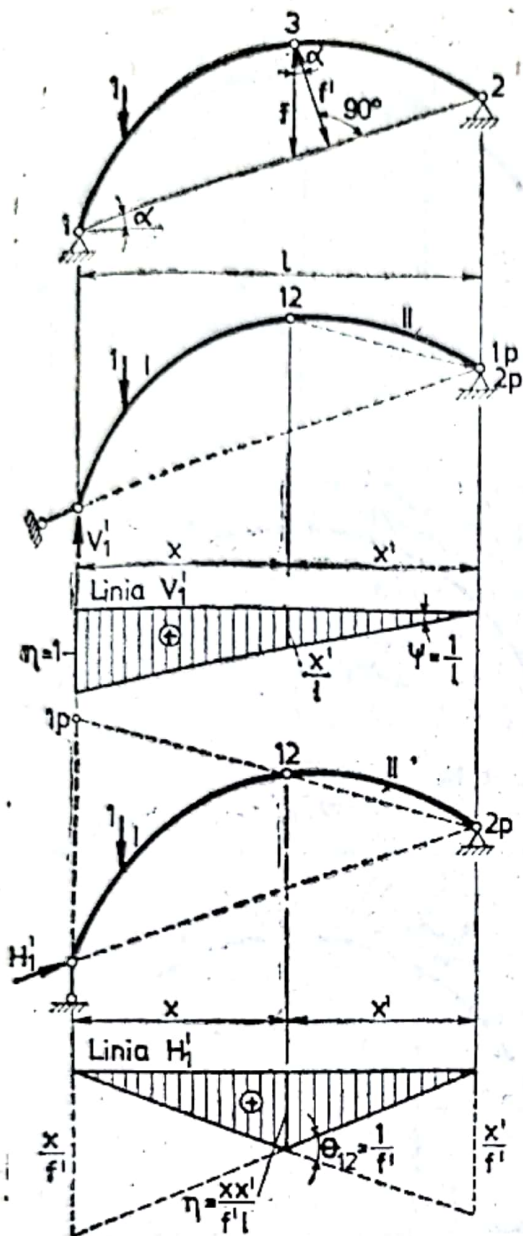


Fig. 7.12

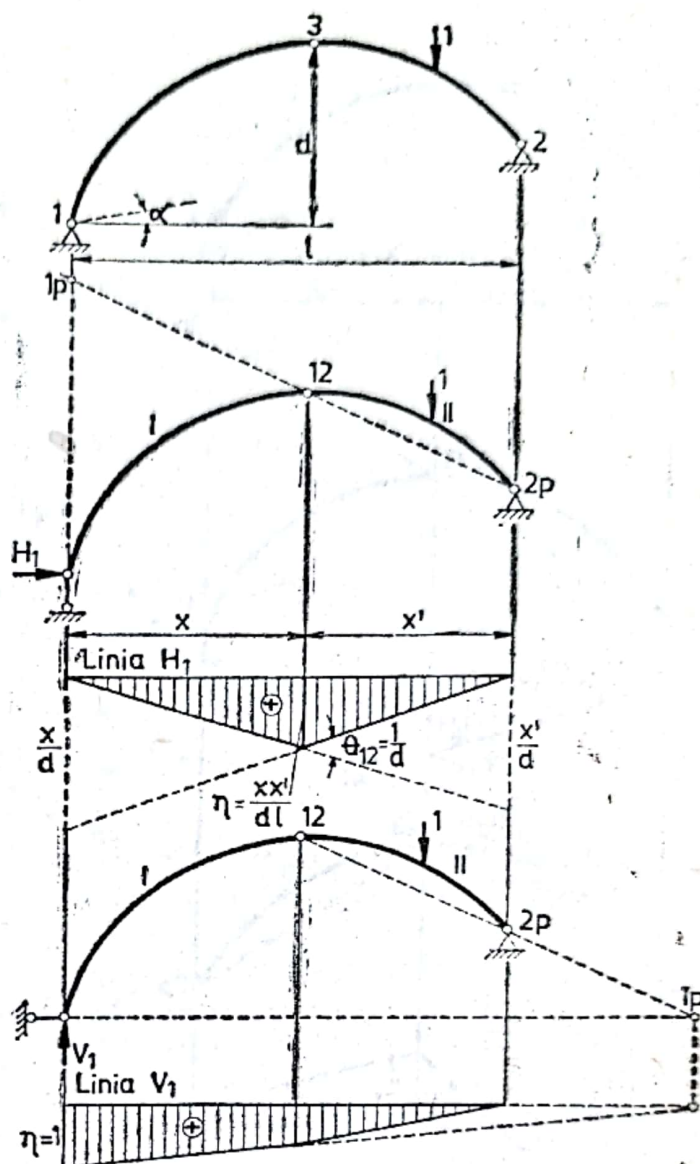


Fig. 7.13

Din relații geometrice rezultă

$$l_2 = \frac{2l}{2 + \frac{l}{f} \frac{y_i}{x_i}}$$

În dreptul reazemului 1 ordonata este $\eta_1 = x_i$, iar în dreptul reazemului 2 ordonata este $\eta_2 = \frac{ly_i}{2f}$.

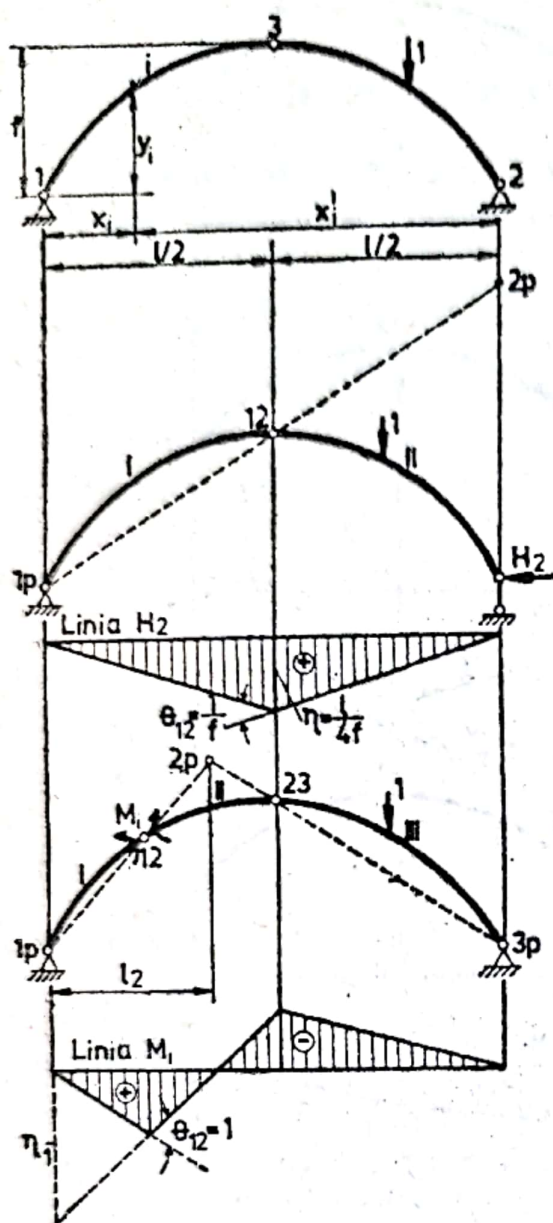


Fig. 7.14

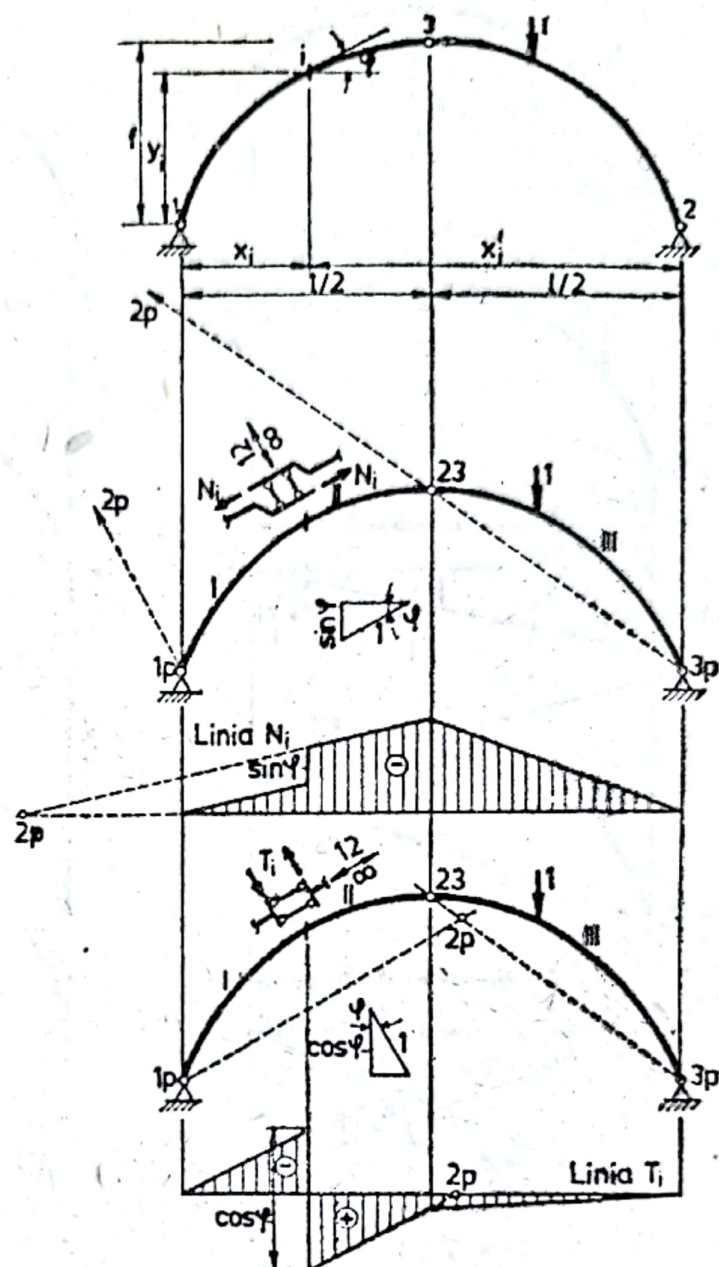


Fig. 7.15

Problema 7.15. Să se traseze liniile de influență ale forței axiale și forței tăietoare din secțiunea i , la arcul cu trei articulații din figura 7.15.

Linia de influență N_i .

Centrul relativ 12 se află la infinit pe direcția normalei la curbă în secțiunea i . Deplasarea $\eta = 1$, care se dă pe direcția forței axiale (pe tangenta în i la curbă), nu apare în diagrama de deplasări. Apare însă proiecția pe verticală a acestei deplasări, egală cu $\sin \varphi$.

Corpurile I și II sînt paralele în poziția deplasată.

Linia de influență T_1 .

Centrul relativ 12 se află la infinit pe direcția tangentei.

Deplasarea $\eta = 1$ avînd loc pe direcția normalei pe curbă, în diagrama de deplasări apare proiecția pe verticală a deplasării unitate, egală cu $\cos \varphi$.

D. MOMENT ÎNCOVOIETOR MAXIM ȘI MOMENT ÎNCOVOIETOR MAXIMUM MAXIMORUM

Moment încovoietor maxim într-o secțiune dată.

Fie grinda dreaptă din figura VII.3 și linia de influență a momentului încovoietor din secțiunea i .

Dacă pe grindă se deplasează un convoi de forțe, atunci pentru o poziție oarecare a convoiului, momentul încovoietor din secțiunea i se determină cu relația

$$M_i = \sum_1^n P_j \eta_{ij}^m, \quad (\text{VII.6})$$

unde P_j este forța curentă din convoiul aflat pe grindă, iar η_{ij}^m este ordonata liniei de influență în secțiunea în care este aplicată forța P_j .

Din relația (VII.6) rezultă că pentru a obține o valoare cît mai mare a momentului încovoietor M_i , este necesar ca forțele cele mai mari ale convoiului să fie plasate în apropierea secțiunii i , unde ordonatele liniei de influență sînt mai mari. În plus, pentru ca momentul încovoietor M_i să fie maxim trebuie ca forța tăietoare să se anuleze, fapt posibil numai dacă în secțiunea i se află o forță concentrată.

Problema ce se pune este de a stabili un criteriu simplu care să permită determinarea poziției convoiului de forțe pentru care momentul încovoietor din secțiunea i este maxim. Acest criteriu are forma

$$R_{st} < \frac{x_i}{x'_i} (R_{dr} + P_i), \quad (\text{VII.7})$$

$$R_{st} + P_i > \frac{x_i}{x'_i} R_{dr},$$

unde $R_{st} = \sum P_k$, $R_{dr} = \sum P_j$, iar P_i este forța ce se află în secțiunea i .

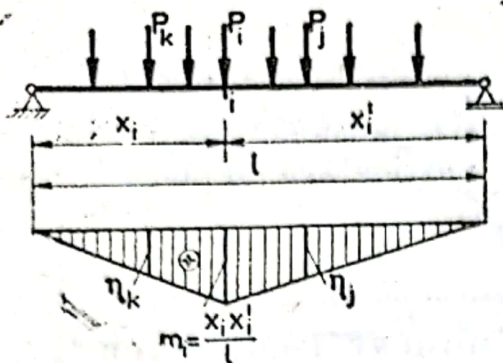


Fig. VII.3]

Calculul practic se conduce astfel: se alege una dintre forțele convoiului ca forță P_i , se determină R_{si} și R_{di} , și se verifică inegalitățile (VII.7). Dacă ambele inegalități sînt satisfăcute rezultă că aceasta este poziția căutată, iar $M_{i \max}$ se determină ca pentru o încărcare fixă.

Dacă una dintre inegalități nu este satisfăcută rezultă că poziția considerată nu conduce la valoarea maximă a momentului încovoietor, iar acesta trebuie deplasat în sensul indicat de simbolul inegalității satisfăcute.

Moment încovoietor maximum maximorum.

Dacă se vor calcula momentele încovoietoare maxime într-un număr mare de secțiuni și se va trasa o diagramă a acestora va exista o secțiune cu un moment încovoietor maxim mai mare decît în celelalte secțiuni. Acesta este momentul maximum maximorum și se notează $M_{\max \max}$. El este momentul încovoietor cel mai mare care poate lua naștere pe o grindă simplu rezemată parcursă de un convoi de forțe.

De remarcat deosebirea ce există între problema calculului momentului încovoietor maxim într-o secțiune dată și a momentului maximum maximorum.

— În cazul calculului momentului încovoietor maxim necunoscuta este numai poziția convoiului pentru care se obține $M_{\max}$.

— În cazul calculului momentului încovoietor maximum maximorum necunoscute sînt atît poziția convoiului, cît și secțiunea în care apare $M_{\max \max}$.

Cu notațiile din figura VII.4 se poate arăta că momentul încovoietor maximum maximorum are loc pentru acea poziție a convoiului de forțe, pentru care mijlocul grinzii împarte în două părți egale distanța dintre rezultanta R a forțelor de pe grindă și forța P_i .

Dacă forța P_i se află în stînga rezultantei (fig. VII.4), expresia momentului încovoietor maximum maximorum este

$$M_{\max \max} = \frac{R(l - c)^2}{4l} - \sum_{k=1}^{i-1} P_k d_k. \quad (\text{VII.8})$$

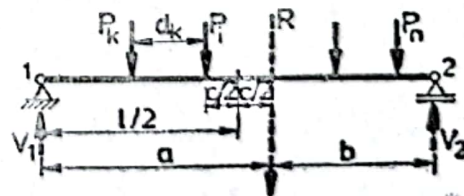


Fig. VII.4

Dacă forța P_i se află în dreapta rezultantei, expresia momentului încovoietor maximum maximorum este

$$M_{max\ max} = \frac{R(l+c)^2}{4l} - \sum_1^{i-1} P_k d_k. \quad (VII.9)$$

Calculul practic al momentului încovoietor maximum maximorum se conduce astfel:

— se determină valoarea rezultantei forțelor ce intră pe grindă și poziția sa în raport cu celelalte forțe din convoi,

— se plasează convoiul de forțe astfel încât mijlocul grinzii să împartă în două părți egale distanța dintre rezultanta R și una dintre forțele apropiate, considerată forța P_i ,

— pentru această poziție a convoiului se verifică inegalitățile (VII.7), respectiv dacă în secțiunea în care este plasată forța P_i se produce moment încovoietor maxim,

— dacă inegalitățile (VII.7) sînt satisfăcute, înseamnă că aceasta este poziția căutată, iar momentul încovoietor din secțiunea i este $M_{max\ max}$, care se calculează cu una dintre relațiile (VII.8) sau (VII.9), după caz,

— dacă inegalitățile (VII.7) nu sînt satisfăcute se caută o altă poziție a convoiului și se parcurg etapele descrise mai înainte.

APLICAȚII

Problema 7.16. Să se determine momentul încovoietor maxim în secțiunea i , la grinda simplu rezemată din figura 7.16, produs de convoiul de forțe mobile dat.

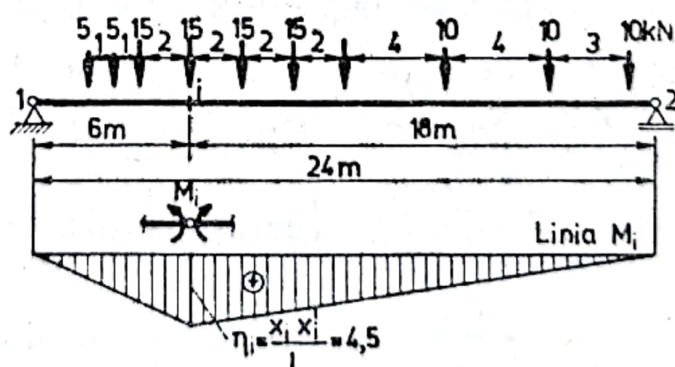


Fig. 7.16

Se stabilește poziția convoiului pentru care în secțiunea i se obține momentul încovoietor maxim. Această poziție corespunde situației în care una din forțele convoiului se află în secțiunea i și sînt satisfăcute inegalitățile:

$$R_{st} < \frac{x_i}{x'_i} (R_{dr} + P_i),$$

$$R_{st} + P_i > \frac{x_i}{x'_i} R_{dr}.$$

Încercarea 1

Se consideră forța $P_2 = 5$ kN ca fiind forța P_i , deci $P_i = P_2$. Se constată că pentru această poziție ultima forță, de 10 kN, nu intră pe grindă.

Cu aceste elemente $R_{st} = 5$ kN, $R_{dr} = 95$ kN

$$5 < \frac{6}{18} (95 + 5) - \text{condiție satisfăcută}$$

$$5 + 5 > \frac{6}{18} \cdot 95 - \text{condiție nesatisfăcută.}$$

Rezultă că poziția convoiului cu forța P_2 în secțiunea i nu este poziție de maxim și convoiul trebuie deplasat mai departe către stînga.

Încercarea 2

$P_i = P_3 = 15$ kN, $R_{st} = 10$ kN, $R_{dr} = 80$ kN. Ultima forță nu pătrunde pe grindă.

$$10 < \frac{6}{18} (80 + 15) - \text{condiție satisfăcută}$$

$$10 + 15 > \frac{6}{18} \cdot 80 - \text{condiție nesatisfăcută.}$$

Convoiul trebuie deplasat mai departe spre stînga.

Încercarea 3

$P_i = P_4 = 15$ kN, $R_{st} = 25$ kN, $R_{dr} = 75$ kN. Ultima forță pătrunde pe grindă.

$$25 < \frac{6}{18} (75 + 15) - \text{condiție satisfăcută}$$

$$25 + 15 > \frac{6}{18} 75 - \text{condiție satisfăcută.}$$

Rezultă că aceasta este poziția convoiului pentru care se obține momentul încovoietor maxim.

Observație. Dacă se deplasează convoiul de forțe mai departe spre stînga, se poate verifica faptul că în nici una dintre poziții înegalitățile de mai sus nu mai sînt satisfăcute.

De exemplu, pentru $P_1 = P_6 = 15$ kN se obține $R_{st} = 35$ kN, $R_d = 60$ kN. Prima forță din stînga se află chiar în dreptul reazemului 1 și nu se ia în calculul rezultantei R_{st} .

$$35 < \frac{6}{18}(60 + 15) - \text{relație nesatisfăcută}$$

$$35 + 15 > \frac{6}{18} \cdot 60 - \text{relație satisfăcută.}$$

Urmează că trebuie deplasat convoiul înapoi spre dreapta, deci cu forța P_4 în secțiunea i , ceea ce se obține din încercarea 3.

Plasînd acum convoiul în poziție fixă, cu forța P_4 în secțiunea i , se calculează momentul încovoietor în această secțiune,

$$V_1 = 64,366 \text{ kN}$$

$$M_{i \max} = V_1 x_i - \sum_1^3 P_k d_k = 64,366 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 15 \cdot 2 = 321,25 \text{ kNm.}$$

Același rezultat se obține dacă se utilizează linia de influență a momentului încovoietor M_i . Se calculează ordonatele liniei de influență din secțiunile în care se află forțele convoiului cînd forța P_4 se află în secțiunea i și se multiplică aceste ordonate cu intensitatea forțelor.

Ordonatele din dreptul forțelor sînt:

$$\eta_1 = 1,5; \eta_2 = 2,25; \eta_3 = 3; \eta_4 = 4,5; \eta_5 = 4; \eta_6 = 3,5; \eta_7 = 3; \\ \eta_8 = 2; \eta_9 = 1; \eta_{10} = 0,25.$$

$$M_{i \max} = 5\eta_1 + 5\eta_2 + 15\eta_3 + 15\eta_4 + 15\eta_5 + 15\eta_6 + 15\eta_7 + 10\eta_8 + \\ + 10\eta_9 + 10\eta_{10} = 321,25 \text{ kNm.}$$

Problema 7.17. Să se determine momentul încovoietor maxim în secțiunea i , la grinda simplu rezemată din figura 7.17.

Pentru situația în care se urmărește calculul momentului încovoietor maxim în mai multe secțiuni, se poate sistematiza calculul

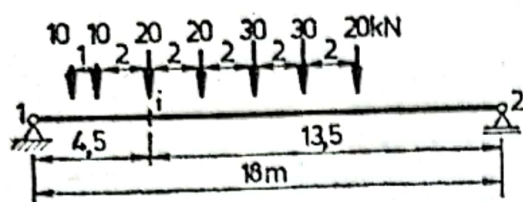


Fig. 7.17

într-un tabel, în care se obțin momentele forțelor de la stînga în raport cu fiecare forță din convoi.

Încercarea 1

$$P_1 = P_3 = 20 \text{ kN},$$

$$R_{st} = 20, \quad R_{dr} = 100$$

$$20 < \frac{4,5}{13,5} (100 + 20) - \text{condiție satisfăcută}$$

$$20 + 20 > \frac{4,5}{13,5} \cdot 100 - \text{condiție satisfăcută.}$$

Accasta este poziția convoiului care produce momentul încovoietor maxim în secțiunea i .

$$\Sigma M_2 = 0$$

$$V_1 \cdot 18 - 670 - 140 \cdot 5,5 = 0, \quad V_1 = 80 \text{ kN}$$

$$M_{i \max} = 80 \cdot 4,5 - 50 = 310 \text{ kNm.}$$

Tabelul 7.1

Nr. crt.	P_j	ΣP_j	d_j	ΣM_j
1	10	10		0
2	10	20	1	10
3	20	40	2	50
4	20	60	2	130
5	30	90	2	250
6	30	120	2	430
7	20	140	2	670

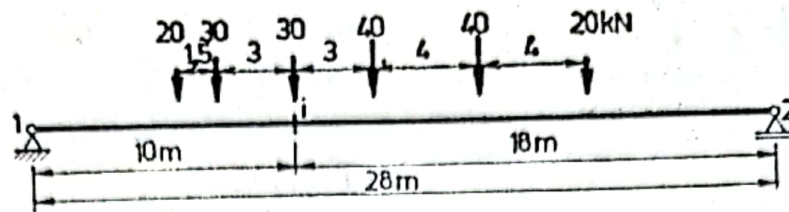


Fig. 7.18

Problema 7.18. Să se determine momentul încovoietor maxim în secțiunea i , la grinda simplu rezemată din figura 7.18.

Încercarea 1

$$P_1 = P_3 = 30 \text{ kN}, \quad R_{s1} = 50 \text{ kN}, \quad R_{dr} = 100 \text{ kN}$$

$$50 < \frac{8}{18} (100 + 30) - \text{condiție satisfăcută}$$

$$50 + 30 > \frac{8}{18} \cdot 100 - \text{condiție satisfăcută}$$

$$\Sigma M_2 = 0$$

$$V_1 \cdot 28 - 1540 - 180 \cdot 7 = 0, \quad V_1 = 100 \text{ kN}$$

$$M_{i \max} = 100 \cdot 10 - 180 = 820 \text{ kNm}$$

Tabelul 7.2

Nr. crt.	P_j	ΣP_j	d_j	ΣM_j
1	20	20		0
2	30	50	1,5	30
3	30	80	3	180
4	40	120	3	420
5	40	160	4	900
6	20	180	4	1540

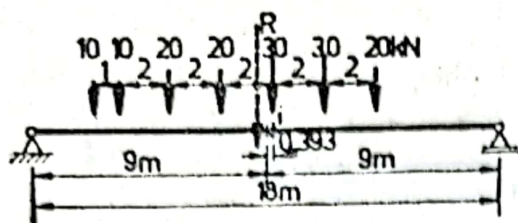


Fig. 7.19

Problema 7.19. Să se determine momentul încovoietor maximum maximorum la grinda simplu rezemată analizată la aplicația 7.19.

Poziția rezultantei convoiului de forțe se stabilește scriind că suma tuturor forțelor în raport cu un punct este egală cu momentul rezultantei în raport cu același punct.

Scriind această condiție în raport cu ultima forță din dreapta convoiului, se obține

$$Rx = \sum P_j d_j, \quad x = \frac{670}{140} = 4,786 \text{ m.}$$

Se așază convoiul pe grindă astfel încât mijlocul grinzii să împartă în două părți egale distanța dintre rezultantă și forța $P_5 = 30 \text{ kN}$ (așa cum se prezintă în figura 7.22). Pentru această poziție se verifică dacă $P_j = P_5 = 30 \text{ kN}$ reprezintă o poziție de moment încovoietor maxim. În aceste condiții: $x_i = 9,393 \text{ m}$, $x'_i = 8,607 \text{ m}$, $R_{st} = 60 \text{ kN}$, $R_{dr} = 50 \text{ kN}$, $x_i/x'_i = 1,09$.

Verificarea condiției de moment încovoietor maxim:

$$60 < 1,09 (50 + 30) \text{ — condiție satisfăcută}$$

$$60 + 30 > 1,09 \cdot 50 \text{ — condiție satisfăcută.}$$

Rezultă că poziția convoiului analizată este o poziție de maxim pentru momentul încovoietor, dar și condiție de moment încovoietor maximum maximorum, deoarece rezultanta și forța P_i se află la distanțe egale de mijlocul grinzii.

Momentul încovoietor maximum maximorum se determină cu relația VII.9,

$$M_{max\ max} = \frac{R(l + c)^2}{4l} - \sum_1^{i-1} P_k d_k$$

și are valoarea

$$M_{max\ max} = \frac{140 (18 + 0,786)^2}{4 \cdot 18} - 250 = 436,22 \text{ kNm.}$$

Observație. Se poate verifica imediat că dacă se așază convoiul pe grindă astfel ca forța P_4 să fie considerată ca forță P_i , aceasta

nu reprezintă o poziție de moment încovoietor maxim. În acest caz:
 $R_{st} = 40 \text{ kN}$, $R_{dr} = 80 \text{ kN}$, $x_i = 8,393$ și $x'_i = 9,607 \text{ m}$,

$$x_i/x'_i = 0,873$$

■ $40 < 0,873 (80 + 20)$ — condiție satisfăcută

$40 + 20 > 0,873 \cdot 80$ — condiție nesatisfăcută,

deci convoiul trebuie deplasat spre stînga, ceea ce conduce la poziția analizată anterior și care este unica poziție de maximum maximorum.

Problema 7.20. Să se determine momentul încovoietor maximum maximorum, la grinda simplu rezemată din figura 7.20.

$$x = \frac{\sum P_j d_j}{R} = \frac{710}{100} = 7,10 \text{ m}$$

$$P_i = P_3 = 30 \text{ kN}$$

$$R_{st} = 30 \text{ kN}, \quad R_{dr} = 40 \text{ kN},$$

$$x_i = 9,55 \text{ m}, \quad x'_i = 10,45 \text{ m},$$

$$x_i/x'_i = 0,914$$

$30 < 0,914 (40 + 30)$ — condiție satisfăcută

$30 + 30 > 0,914 \cdot 40$ — condiție satisfăcută

$$M_{max\ max} = \frac{100(20 - 0,9)^2}{4 \cdot 20} - 110 = 346 \text{ kNm}.$$

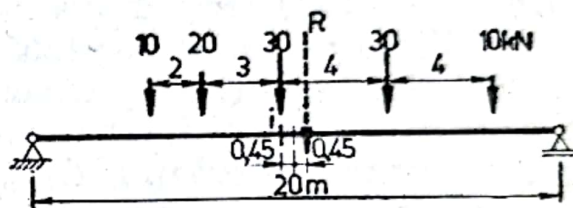


Fig. 7.20

Tabelul 7.3

Nr. crt.	P_j	$\sum P_j$	d_j	$\sum M_j$
1	10	10		0
2	20	30	2	20
3	30	60	3	110
4	30	90	4	350
5	10	100	4	710

Capitolul VIII

DEFORMAREA STRUCTURILOR ELASTICE

Obiectul Staticii construcțiilor este calculul eforturilor și deplasărilor ce iau naștere în structurile alcătuite din bare. Determinarea eforturilor este necesară pentru dimensionarea structurii. În aceeași măsură este importantă și cunoașterea deplasărilor. Astfel, buna funcționare a construcției cere ca deplasările să nu depășească anumite valori maxime prevăzute de prescripțiile oficiale. Trebuie arătat că în mod obișnuit la construcțiile curente satisfacerea condiției de rezistență conduce și la satisfacerea condiției de deformare, așa încât calculul deplasărilor se efectuează numai în anumite cazuri. Pe de altă parte, determinarea prin calcul a deplasărilor permite compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale, aceasta fiind singura modalitate de verificare a schematizărilor și ipotezelor simplificatoare admise. Dar, pentru Statica construcțiilor studiul deformării structurilor este de mare importanță deoarece reprezintă mijlocul de rezolvare a structurilor static nedeterminate. Numai considerând echilibrul în poziția deformată se pot obține ecuațiile suplimentare necesare calculului eforturilor la aceste structuri.

Deoarece în calculul de ordinul I s-a admis ipoteza comportării liniar elastice a materialului, deplasările se numesc *deplasări elastice*.

Pentru a aborda calculul deplasărilor elastice se face apel la noțiunile de lucru mecanic exterior, lucru mecanic interior, lucru mecanic al eforturilor sau energie de deformare și se stabilesc relațiile dintre aceste mărimi fizice.

a) Lucru mecanic. Energie de deformare.

Sub acțiunea forțelor exterioare structura se deformează, iar în material se dezvoltă forțe interioare. Prin trecerea din poziția inițială în poziția deformată, punctele de aplicație ale forțelor exterioare și forțelor interioare își schimbă pozițiile, iar forțele produc lucru mecanic.

Lucrul mecanic produs de forțele exterioare se numește *lucru mecanic exterior*, iar lucrul mecanic produs de forțele interioare se numește *lucru mecanic interior*. Întrucât forțele interioare se opun deformării materialului, lucrul mecanic interior este un lucru mecanic rezistent și ca atare în calcul este afectat de semnul minus.

În practica curentă se lucrează cu eforturi și deformațiile corespunzătoare și de aceea se obișnuiește să se utilizeze *lucrul mecanic al eforturilor* sau *energia de deformare*, acestea fiind egale între ele. Lucrul mecanic al eforturilor este egal și de semn contrar cu lucrul mecanic al forțelor interioare

$$L_{ef} = W = -L_{int}, \quad (\text{VIII.1})$$

unde cu W s-a notat energia de deformare. Această energie este acumulată de structură în timpul deformării și este eliberată în timpul revenirii acesteia la poziția inițială, când cauza care a produs deformarea a fost înlăturată.

În figura VIII.1 este reprezentată o grindă simplu rezemată în poziție inițială și în poziție deformată, cu indicarea deplasărilor secțiunilor în care se aplică forțele — translații și rotații.

Deplasarea secțiunii i , notată cu U_i , este efectul cumulat al forțelor P_i și P_j și se poate exprima astfel

$$U_i = U_{ii} + U_{ij}, \quad (\text{VIII.2})$$

unde U_{ii} reprezintă deplasarea pe direcția forței P_i produsă de ea însăși, iar U_{ij} reprezintă deplasarea pe direcția forței P_i produsă de forța P_j .

Din cele de mai sus rezultă că forța P_i efectuează lucru mecanic parcurgând deplasarea U_{ii} produsă de ea însăși precum și deplasarea U_{ij} produsă de forța P_j . Analiza celor două situații permite scoaterea în evidență a diferențelor dintre ele.

1. Grinda din figura VIII.2, a este încărcată static cu forța P_i și ajunge în poziția deformată din figura VIII.2, b. Relația forță-deplasare este reprezentată în figura VIII.2, c. Lucrul mecanic al forței P_i parcurgând deplasarea U_{ii} este lucru mecanic exterior L_{ext} , care în acest caz se notează cu L_{ii} și are expresia

$$L_{ext} = L_{ii} = \frac{1}{2} P_i U_{ii}. \quad (\text{VIII.3})$$

Din relația (VIII.3) rezultă că lucrul mecanic efectuat de forța P_i parcurgând

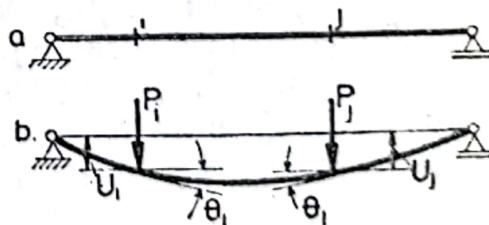


Fig. VIII.1

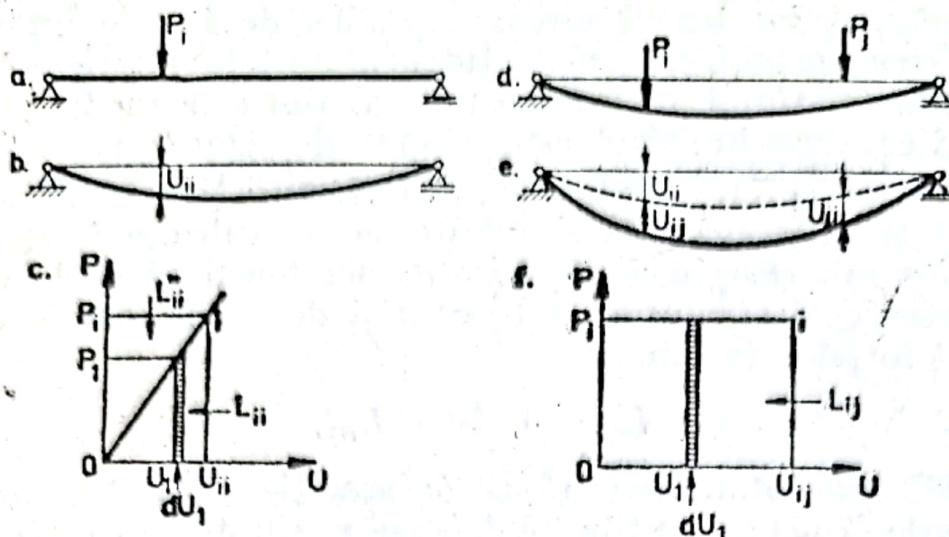


Fig. VIII.2

deplasarea U_{ii} produsă de ea însăși este egal cu jumătatea produsului dintre forță și deplasare, fiind reprezentat de suprafața triunghiului cuprins între axa oU și dreapta oi (fig. VIII.2, c).

Suprafața cuprinsă între dreapta oi și axa verticală, notată L_{ii}^* , reprezintă lucrul mecanic complementar. Pentru cazul materialelor liniar elastice rezultă $L_{ii} = L_{ii}^*$.

2. În poziția deformată produsă de forța P_i (fig. VIII.2,d) se aplică static forța P_j . Se ajunge în poziția deformată din figura VIII.2, e. Pe direcția forței P_i se produce deplasarea U_{ij} , deplasare pe care forța P_i o parcurge cu întreaga ei intensitate.

Lucrul mecanic efectuat de forța P_i parcurgînd deplasarea U_{ij} se notează cu L_{ij} și are expresia

$$L_{ext} = L_{ij} = P_i U_{ij}. \quad (\text{VIII.4})$$

Din relația (VIII.4) rezultă că lucrul mecanic efectuat de forța P_i parcurgînd deplasarea U_{ij} , produsă pe direcția sa de forța P_j , este egal cu produsul dintre forță și deplasare și este reprezentat de dreptunghiul oP_iU_{ij} (fig. VIII.2,f).

Concomitent forța P_j produce lucrul mecanic L_{jj} , parcurgînd deplasarea U_{jj} . Expresia acestui lucru mecanic este de forma (VIII.3), indicii i fiind înlocuiți cu j .

Rezultă că în cea de a doua situație de încărcare lucrul mecanic efectuat este

$$L_{ij} + L_{jj} = P_i U_{ij} + \frac{1}{2} P_j U_{jj}. \quad (\text{VIII.5})$$

Corespunzător celor două situații de încărcare se poate stabili expresia energiei de deformare și a lucrului mecanic al eforturilor.

Energia de deformare.

1. În prima situație de încărcare atât eforturile unitare σ cât și deformările specifice ϵ cresc concomitent de la valoarea zero la valoarea finală σ_i și respectiv ϵ_i (fig. VIII.3, a).

Energia de deformare reprezintă suprafața cuprinsă între curba caracteristică și axa orizontală și are expresia

$$W_{ii} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_i \epsilon_i dV, \quad (\text{VIII.6})$$

integrala fiind extinsă asupra întregului corp.

2. În cea de a doua situație de încărcare energia de deformare acumulată de corp este

$$W_{ij} + W_{ji} = \int_V \sigma_i \epsilon_j dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_j \epsilon_j dV. \quad (\text{VIII.7})$$

Observații. În relațiile de mai sus σ_i și σ_j reprezintă efortul unitar, pe o direcție oarecare, corespunzător nivelului de încărcare i , respectiv j .

Suprafața cuprinsă între dreapta oi și axa verticală reprezintă energia complementară de deformare. Din figura VIII.3, a rezultă că $W_{ii} = W_{ii}^*$.

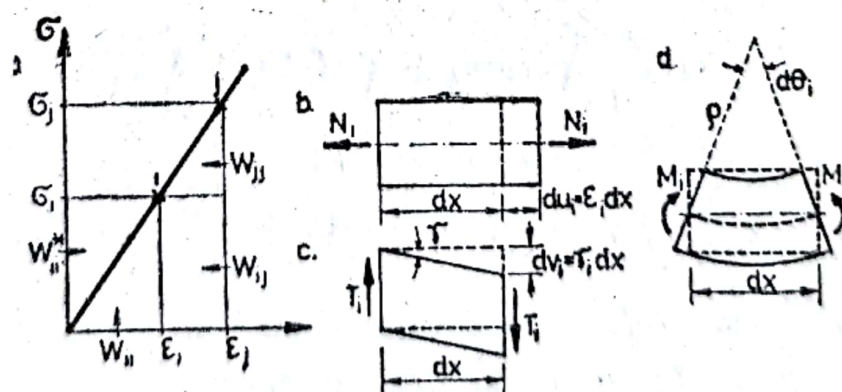


Fig. VIII.3

Lucrul mecanic al eforturilor.

1. În prima situație de încărcare lucrul mecanic al eforturilor N_i , T_i și M_i este:

$$\begin{aligned}L_{ii}^N &= \frac{1}{2} \int N_i du_i = \frac{1}{2} \int \frac{N_i^2}{EA} dx, \\L_{ii}^M &= \frac{1}{2} \int M_i d\theta_i = \frac{1}{2} \int \frac{M_i^2}{EI} dx, \\L_{ii}^T &= \frac{1}{2} \int T_i dv_i = \frac{1}{2} \int \frac{kT_i^2}{GA} dx,\end{aligned}\quad (\text{VIII.8})$$

$$\text{unde } du_i = \varepsilon_i dx = \frac{N_i}{EA} dx, \quad d\theta_i = \frac{1}{\rho} dx = \frac{M_i}{EI} dx,$$

$dv_i = \gamma_i dx = \frac{kT_i}{GA} dx$, iar $k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$ reprezintă coeficientul de formă al secțiunii și are valoarea $k = 1, 2$ pentru secțiuni dreptunghiulare, $k = \frac{10}{9}$ pentru secțiuni circulare și $k = \frac{32}{27}$ pentru secțiuni triunghiulare.

Cu expresiile acestea se poate scrie forma generală a lucrului mecanic al eforturilor

$$L_{ef} = L_{ii} = \frac{1}{2} \int \frac{N_i^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M_i^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int \frac{kT_i^2}{GA} dx. \quad (\text{VIII.9})$$

2. În situația a doua de încărcare lucrul mecanic al eforturilor este

$$L_{ef} = L_{ij} = \int N_i du_j + \int M_i d\theta_j + \int T_i dv_j \quad (\text{VIII.10})$$

sau

$$L_{ef} = L_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int \frac{kT_i T_j}{GA} dx. \quad (\text{VIII.11})$$

Lucrul mecanic total.

Se definește ca lucru mecanic total, lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare și interioare în cursul deformării structurii

$$L_{tot} = L_{ext} + L_{int} = L_{ext} - L_{ef} = L_{ext} - W. \quad (\text{VIII.12})$$

Pentru cele două situații cu încărcare rezultă :

$$L_{ii} = \frac{1}{2} \sum P_i U_{ii} - \frac{1}{2} \int \frac{N_i^2}{EA} dx - \frac{1}{2} \int \frac{M_i^2}{EI} dx - \frac{1}{2} \int \frac{kT_i^2}{GA} dx, \quad (\text{VIII.13})$$

$$L_{ij} = \sum P_i U_{ij} - \int \frac{N_i N_j}{EA} dx - \int \frac{M_i M_j}{EI} dx - \int \frac{kT_i T_j}{GA} dx. \quad (\text{VIII.14})$$

Teorema lui Clapeyron.

Conform teoremei energiei, $dE = dL$, variația energiei cinetice într-un interval de timp este egală cu variația lucrului mecanic elementar.

Deoarece s-a admis că forțele se aplică static, vitezele de deplasare ale maselor sînt egale cu zero și variația energiei cinetice rezultă că este de asemenea egală cu zero. În consecință

$$L_{\text{tot}} = \int dL = L_{\text{ext}} - L_{\text{ef}} = 0, \quad (\text{VIII.15})$$

de unde

$$L_{\text{ext}} = L_{\text{ef}} \text{ sau } L_{\text{ext}} = W. \quad (\text{VIII.16})$$

Relația (VIII.16) reprezintă teorema lui Clapeyron și se enunță astfel: „*pentru un sistem conservativ aflat în echilibru sub acțiunea unui ansamblu de forțe, lucrul mecanic al forțelor exterioare este egal cu energia de deformare acumulată de sistem*”.

În conformitate cu (VIII.16), relațiile (VIII.13) și (VIII.14) se pot scrie :

$$\sum P_i U_{ii} = \int \frac{N_i^2}{EA} dx + \int \frac{M_i^2}{EI} dx + \int \frac{kT_i^2}{GA} dx, \quad (\text{VIII.17})$$

$$\sum P_i U_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int \frac{kT_i T_j}{GA} dx. \quad (\text{VIII.18})$$

b) **Calculul deplasărilor punctuale. Formula Maxwell-Mohr.**

Prin deplasare punctuală se înțelege deplasarea liniară (translația) a centrului de greutate al unei secțiuni și rotirea planului secțiunii. Pentru stabilirea expresiei generale a deplasărilor punctuale se utilizează relația (VIII.18), făcînd următoarele particularizări :

- se consideră că sistemul de forțe P_j este sistemul real de forțe,
- se consideră că sistemul de forțe P_i este format dintr-o singură forță egală cu unitatea ($P_i = 1$), aplicată în punctul a cărui deplasare trebuie determinată (i) și avînd direcția deplasării ce se cal-

culează (U_i). Ea va fi situația auxiliară de încărcare și conduce la apariția în structură a eforturilor n_i, m_i, t_i .

În aceste condiții relația (VIII.18), care exprimă egalitatea lucrului mecanic exterior și a energiei de deformare, devine

$$1. U_i = \int \frac{n_i N_j}{EA} dx + \int \frac{m_i M_j}{EI} dx + \int \frac{kt_i T_j}{GA} dx. \quad (\text{VIII.19})$$

În calculul curent, deoarece N_j, M_j, T_j sînt produse de forțele reale, se renunță la indicele j .

Relația (VIII.19) reprezintă formula Maxwell-Mohr pentru calculul deplasărilor elastice la structuri încărcate cu forțe, structurile putînd fi static determinate sau static nedeterminate.

În cazul structurilor static determinate încărcările cu cedări de reazeme și variație de temperatură produc numai modificări ale geometriei structurii, nu și eforturi. Geometria modificîndu-se, secțiunile se deplasează.

Din încărcarea cu forța $P_i = 1$, în reazeme apar reacțiunile r_{ki} , reacțiuni care parcurgînd deplasările U_k ale acestor reazeme produc lucrul mecanic exterior,

$$L_{ij} = \sum r_{ki} U_k. \quad (\text{VIII.20})$$

Eforturile n_i și m_i parcurg deplasările produse de variația de temperatură, producînd lucrul mecanic

$$L_{ij} = W_{ij} = \int \alpha n_i t_m dx + \int \alpha m_i \frac{\Delta t}{h} dx, \quad (\text{VIII.21})$$

unde $t_m = \frac{t_2 + t_1}{2}$ și $\Delta t = t_2 - t_1$, în condiția $t_2 > t_1$.

Cu aceste elemente expresia deplasărilor elastice la structuri static determinate este

$$1. U_i + \sum r_{ki} U_k = \int \frac{n_i N}{EA} dx + \int \frac{m_i M}{EI} dx + \int \frac{kt_i T}{GA} dx + \int \alpha n_i t_m dx + \int \alpha m_i \frac{\Delta t}{h} dx. \quad (\text{VIII.22})$$

Dacă deplasarea căutată este translație, atunci încărcarea unitate este o forță sau o pereche de forțe (pentru translație relativă), iar dacă deplasarea este o rotire, atunci încărcarea unitate este un moment concentrat sau o pereche de momente (pentru rotire relativă).

Structuri încărcate cu forțe. Calculul deplasărilor elastice se efectuează cu relația (VIII.19). Pentru diferite tipuri de structuri, cele

trei integrale au ponderi diferite. Astfel, deplasarea se calculează cu relațiile:

$$- U_i = \int \frac{m_i M}{EI} dx \quad \text{— la cadre și grinzi din bare drepte,}$$

$$- U_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx = \sum_1^b \frac{n_{kh,i} N_{kh} l_{kh}}{EA_{kh}} \quad \text{— la grinzi cu zăbrele.}$$

Etapele de lucru în calculul practic sînt următoarele:

— se încarcă structura cu forțele exterioare și se determină eforturile M sau N , după caz,

— se încarcă structura cu $P_i = 1$ și se determină eforturile m_i sau n_i , după caz,

— se efectuează calculul integralelor din expresia deplasării.

Semnul integralelor este plus dacă m_i și M întind aceeași fibră sau dacă n_i și N sînt de aceeași natură și este minus în caz contrar.

Pornind de la observația că diagramele unitare m_i sînt liniare, rezultatul integrării se poate obține prin regula lui Vereșciaghin potrivit căreia „rezultatul integrării a două diagrame, dintre care cel puțin una trebuie să fie liniară, este egal cu produsul dintre suprafața diagramei M și ordonata din diagrama cu variație liniară măsurată în dreptul centrului de greutate al diagramei M ”.

Rezultatul integrării unor diagrame este prezentat în Anexa 1.

Cîteva exemple particulare sînt date în continuare.

Rezultatul integrării diagramelor din figura VIII.4, a se obține descompunînd diagrama I într-o parabolă și un triunghi,

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} bl \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} al \frac{2}{3} c \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{bcl}{3} - \frac{acl}{3} \right).$$

Rezultatul integrării diagramelor din figura VIII.4, b este

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} dl \frac{1}{3} f - \frac{1}{2} el \frac{2}{3} f \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{dfl}{6} - \frac{efl}{3} \right).$$

Structuri încărcate cu cedări de reazeme. Calculul deplasărilor se efectuează cu relația

$$U_i = -\sum r_{ki} U_k. \quad (\text{VIII.23})$$

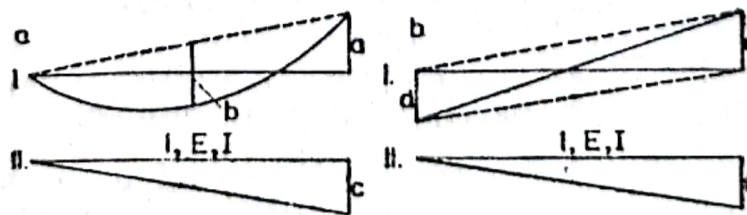


Fig. VIII.4

Etapele de lucru sînt următoarele:

- se încarcă structura cu $P_i = 1$ și se determină reacțiunile r_{ki} ,
- se efectuează produsele din expresia (VIII.23).

Structuri încărcate cu variație de temperatură. Calculul deplasărilor se efectuează cu relația

$$U_i = \int \alpha n_i t_m dx + \int \alpha m_i \frac{\Delta t}{h} dx. \quad (\text{VIII.24})$$

Etapele de lucru sînt următoarele:

- se încarcă structura cu $P_i = 1$ și se determină eforturile m_i și n_i ,
- se calculează integralele din expresia (VIII.24).

c) Calculul deplasărilor elastice la sisteme alcătuite din bare cu secțiune variabilă.

Folosirea unor elemente de rezistență la care distribuția materialului urmărește variația eforturilor conduce la obținerea de soluții raționale pentru structurile portante ale construcțiilor. De aceea, în practică se utilizează bare cu înălțimea secțiunii transversale variabilă, pe toată lungimea sau numai pe o anumită zonă.

În cazul structurilor static nedeterminate variația secțiunii barelor are influență hotărîtoare asupra diagramelor de momente încovoietoare; părțile puternic dimensionate atrag spre ele eforturi importante, descărcînd celelalte părți.

La structurile din beton armat variația secțiunii se realizează spre capetele barelor, zonele respective numindu-se *vute*. În mod obișnuit vutele sînt drepte sau parabolice și pot fi la unul sau la ambele capete ale barei (fig. VIII.5, a, b, c, d). De asemenea bara poate avea înălțimea variabilă pe toată lungimea (fig. VIII.5, e).

La structurile metalice variația secțiunii barelor se realizează de obicei ca în figura VIII.5, f, g.

Stîlpii halelor industriale cu pod rulant sînt executați cu secțiunea variabilă în trepte (fig. VIII.5, h), indiferent de materialul folosit.

Datorită variației înălțimii secțiunii barei, deci și a momentului de inerție, efectuarea integralei de forma $\int \frac{m_i M}{EI} dx$

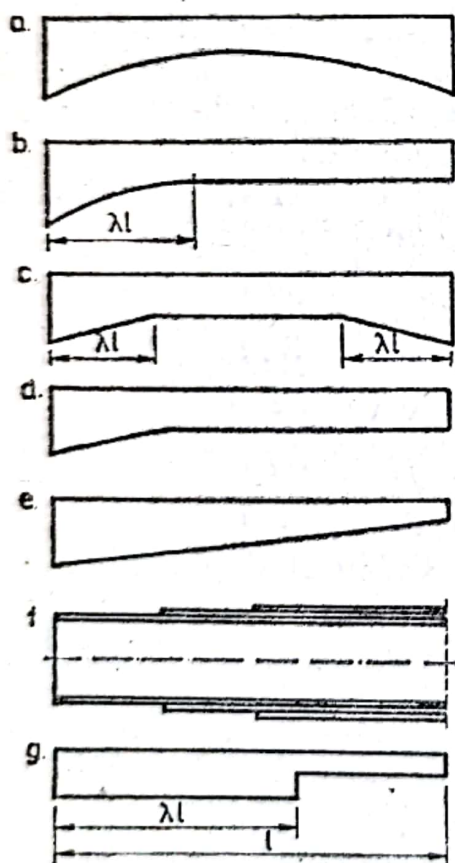


Fig. VIII.5

devine mai dificilă, ne mai putîndu-se aplica regula lui Vereşciaghin. De aceea, se urmăreşte să se obţină forme care să uşureze rezolvarea. Aceasta se realizează stabilind expresii asemănătoare celor de la barele cu secţiune constantă, corectate cu ajutorul unor coeficienţi.

Se examinează diagramele din figura VIII.6, considerînd bara cu secţiune variabilă şi rezultă:

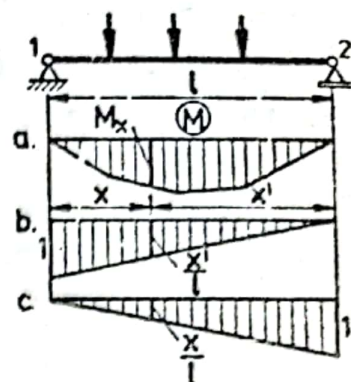


Fig. VIII.6

— Integrarea produsului diagramelor a şi b

$$\int_0^l \frac{x'}{l} M \, dx = \frac{l}{6EI_0} \frac{6}{l^2} \int_0^l x' M \frac{I_0}{I} \, dx = \frac{l}{6EI_0} m' = \frac{l}{6EI_0} m_1 s', \quad (\text{VIII.25})$$

— Integrarea produsului diagramelor a şi c

$$\int_0^l \frac{x}{l} M \, dx = \frac{l}{6EI_0} \frac{6}{l^2} \int_0^l x M \frac{I_0}{I} \, dx = \frac{l}{6EI_0} m'' = \frac{l}{6EI_0} m_2 s'', \quad (\text{VIII.26})$$

— Integrarea produsului diagramelor b şi b

$$\int_0^l \left(\frac{x'}{l} \right)^2 \, dx = \frac{l}{3EI_0} \frac{3}{l^3} \int_0^l x'^2 \frac{I_0}{I} \, dx = \frac{l}{3EI_0} c', \quad (\text{VIII.27})$$

— Integrarea produsului diagramelor c şi c

$$\int_0^l \left(\frac{x}{l} \right)^2 \, dx = \frac{l}{3EI_0} \frac{3}{l^3} \int_0^l x^2 \frac{I_0}{I} \, dx = \frac{l}{3EI_0} c'', \quad (\text{VIII.28})$$

— Integrarea produsului diagramelor b şi c

$$\int_0^l \frac{x'}{l} \frac{x}{l} \, dx = \frac{l}{6EI_0} \frac{6}{l^3} \int_0^l x x' \frac{I_0}{I} \, dx = \frac{l}{6EI_0} c. \quad (\text{VIII.29})$$

În expresiile (VIII.25) — (VIII.29) s-au făcut notațiile:
 I_0 , momentul de inerție al secțiunii minime a barei,

$$s' = \frac{\int x' M \frac{I_0}{I} dx}{\int x' M dx} \text{ și } s'' = \frac{\int x M \frac{I_0}{I} dx}{\int x M dx}.$$

$$c' = \frac{3}{l^3} \int x'^2 \frac{I_0}{I} dx, \quad c = \frac{6}{l^3} \int x x' \frac{I_0}{I} dx \text{ și}$$

$$c'' = \frac{3}{l^3} \int x^2 \frac{I_0}{I} dx.$$

$$m_1 = \frac{6S_{21}}{2} \text{ și } m_2 = \frac{6S_{12}}{2}.$$

Cantitățile m_1 și m_2 se numesc *caracteristici de încărcare* și caracterizează complet încărcarea barei. Expresiile lor se găsesc în cărți de specialitate, pentru diferite încărcări aplicate pe bară. S_{21} , respectiv S_{12} , reprezintă momentul static al diagramei M în raport cu extremitatea 2, respectiv 1 a barei.

Se observă că au fost obținute forme simple, ușor de reținut, pentru rezultatele celor cinci integrale.

Coeficienții s' , s'' , c' , c și c'' sînt denumiți *coeficienți de secțiune variabilă*. Dintre aceștia, trei, c' , c și c'' , depind numai de variația secțiunii, iar doi, s' și s'' , depind și de încărcare și trebuie reținuți ca în figura VIII.7.

$$\frac{c'}{s'} \quad c \quad c''/s''$$

Fig. VIII.7

Coeficienții de secțiune variabilă se utilizează în mod curent la proiectarea construcțiilor din beton armat și sînt dați în tabele pentru diferite tipuri de vute și încărcări, în

funcție de $n = \frac{I_0}{I_{max}}$ și $\lambda = \frac{l_0}{l}$.

În cazul barelor cu vute simetrice $c' = c''$, iar dacă și încărcarea este simetrică $s' = s''$.

APLICAȚII

Problema 8.1. Să se determine deplasările u_2 și v_3 pentru bara din figura 8.1, efectuînd integralele atît prin metoda Vereschia-ghin cît și direct.

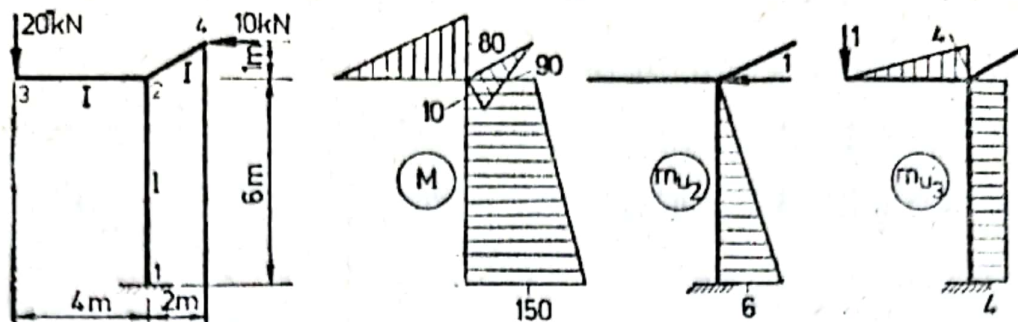


Fig. 8.1

Din încărcările exterioare date se trasează diagrama M , care se utilizează pentru calculul oricărei deplasări.

Încărcînd succesiv bara cu cîte o forță unitate pe direcția fiecărei deplasări cerute, se trasează diagramele m_{u_2} și m_{v_3} .

Integrînd diagrama M cu m_{u_2} , se obține deplasarea u_2 și în mod asemănător, integrînd diagrama M cu m_{v_3} , se obține deplasarea v_3 .

a) **Calculul prin metoda Vereșciaghin.**

$$u_2 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \left(\frac{1}{3} \cdot 90 + \frac{2}{3} \cdot 150 \right) \right] = \frac{2340}{EI}$$

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 80 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 6 \left(\frac{1}{2} \cdot 90 + \frac{1}{2} \cdot 150 \right) \right] = \frac{3306,66}{EI}$$

Pentru $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ și $I = 19,600 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ se obține:

$$u_2 = 0,055 \text{ m} = 5,5 \text{ cm},$$

$$v_3 = 0,056 \text{ m} = 5,6 \text{ cm}.$$

b) **Calculul prin integrare directă.**

Expresia deplasării fiind $u_i = \int \frac{m_i M}{EI} dx$, rezultă că este necesar să se scrie expresiile momentelor încovoietoare m_i și M , pe fiecare interval cu aceeași lege de variație, iar apoi să se efectueze calculele.

Expresia momentului încovoietor M :

— pe bara 1—2 $M_{12} = 150 - 10x$,

— pe bara 2—3 $M_{23} = 80 - 20x$.

Deplasarea u_2

Expresia momentului încovoietor m_{u_2} :

— pe bara 1—2 $m_{12} = 6 - x$

— pe bara 2—3 $m_{23} = 0$

$$u_2 = \frac{1}{EI} \int_0^6 (150 - 10x)(6 - x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^6 (900 - 210x + 10x^2) dx =$$
$$= \frac{1}{EI} \left[900x - 210 \frac{x^2}{2} + 10 \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = \frac{2340}{EI}.$$

Deplasarea v_3

Expresia momentului încovoietor m_{v_3} :

— pe bara 1—2 $m_{12} = 4$

— pe bara 2—3 $m_{23} = 4 - x$

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^6 (150 - 10x)4 dx + \int_0^4 (80 - 20x)(4 - x) dx \right]$$

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left[\int_0^6 (600 - 40x) dx + \int_0^4 (320 - 160x + 20x^2) dx \right]$$

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left[600x - 40 \frac{x^2}{2} \right]_0^6 + \left[320x - 160 \frac{x^2}{2} + 20 \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{3306,66}{EI}$$

Rezultatele obținute prin cele două metode sînt identice, cu observația că volumul de calcule prin metoda Vereșciaghin este mai redus.

Problema 8.2. Să se determine rotirile θ_1 , θ_2 , θ_3 și deplasarea v_3 , la grinda cu consolă din figura 8.2.

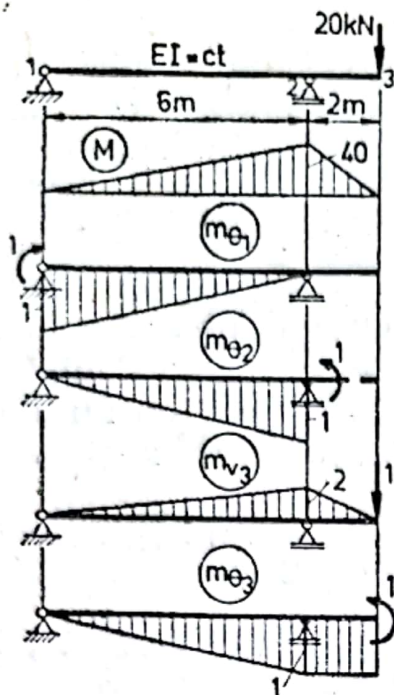


Fig. 8.2

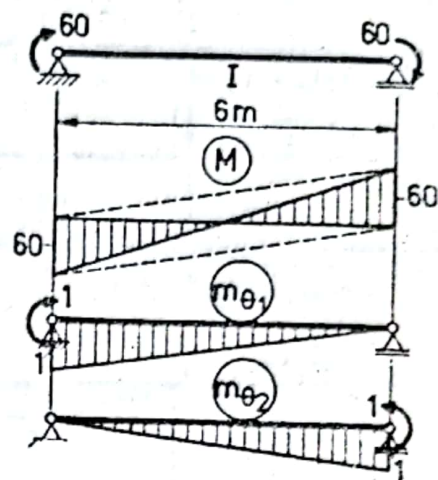


Fig. 8.3

$$\theta_1 = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{40}{EI}$$

$$\theta_2 = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{80}{EI}$$

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{213,33}{EI}$$

$$\theta_3 = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot 1 \right) = -\frac{120}{EI}$$

Semnul minus obținut pentru rotirile θ_1 , θ_2 și θ_3 indică faptul că sensul real al rotirilor este invers sensului momentului unitate.

Problema 8.3. Să se determine rotirile θ_1 și θ_2 la grinda simplu rezemată din figura 8.3.

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 60 \right) = \frac{60}{EI}$$

Problema 8.4. Să se determine deplasările v_3 , θ_3^{rel} și θ_5 la grinda Gerber din figura 8.4.

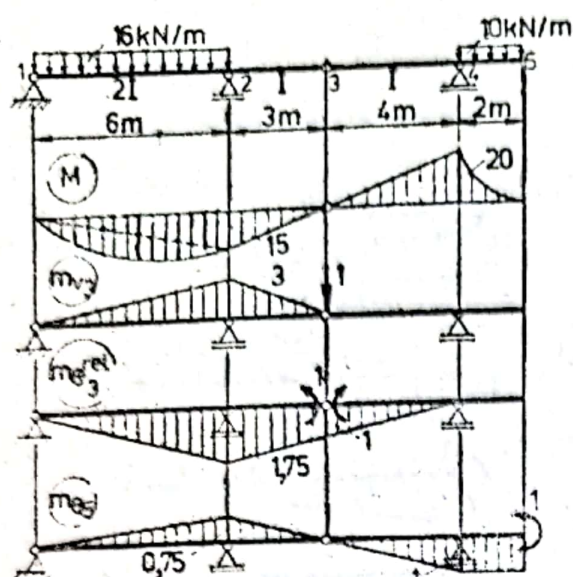


Fig. 8.4

Pentru calculul deplasării v_3 se încarcă grinda cu o forță unitate în articulația 3. Pentru calculul rotirii relative din articulația 3, θ_3^{rel} , se încarcă grinda cu o pereche de momente încovoietoare, fiecare dintre ele fiind egal cu unitatea și avînd sensuri contrare. Pentru calculul rotirii θ_5 se încarcă grinda cu un moment încovoietor unitate în secțiunea 5.

$$v_3 = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{16 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = -\frac{306}{EI}$$

$$\theta_3^{\text{rel}} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1,75 \right) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,75 + \frac{2}{3} \cdot \frac{16 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,75 \right) = \frac{105,17}{EI}$$

$$\theta_5 = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 \right) - \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{2}{3} \cdot \frac{16 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \right) = -\frac{116,50}{EI}$$

Problema 8.5. Să se calculeze deplasarea pe verticală v_3 și rotirea θ_3^{rel} la grinda cu console și articulații din figura 8.5.

$$v_3 = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \frac{106}{EI}$$

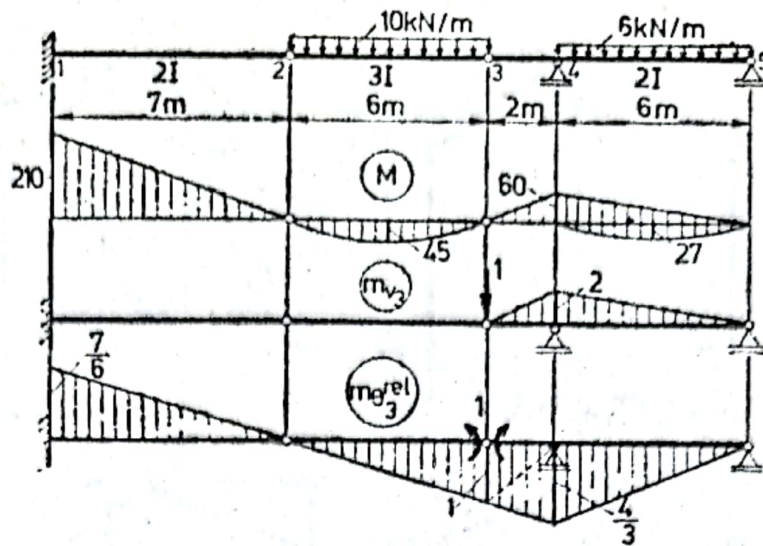


Fig. 8.5

$$\theta_3^{\text{rel}} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 210 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 -$$

$$- \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{6 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right] = \frac{77,94}{EI}.$$

Problema 8.6. Să se determine deplasările v_3 și θ_2 la structura din figura 8.6.

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right) = -\frac{959}{EI}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 \cdot \frac{7}{9} \right) = -\frac{788}{EI}.$$

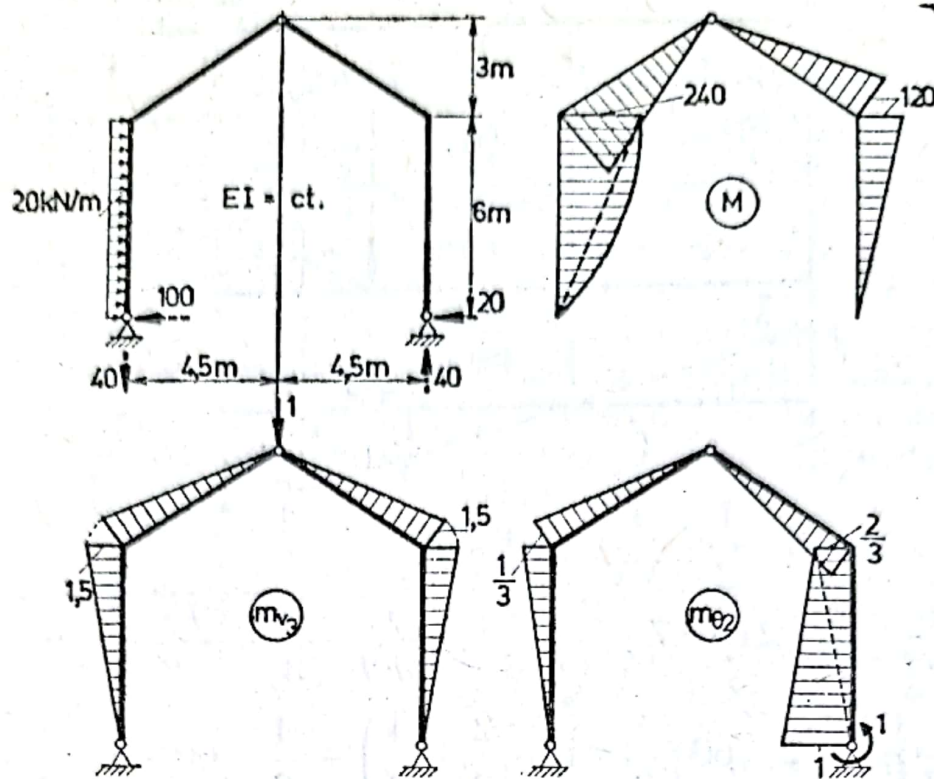


Fig. 8.6

Ambele deplasări se produc în sens invers sensului de acțiune al forțelor unitate introduse pe direcțiile deplasărilor căutate.

Problema 8.7. Să se determine deplasarea relativă pe orizontală a secțiunilor 1 și 2 și deplasările u_3 și v_3 , la structura din figura 8.7.

$$\begin{aligned}
 u_{12} &= \frac{1}{1,5EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{200}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{700}{9} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1100}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{280}{3} \right) = -\frac{82}{EI} \\
 v_3 &= \frac{1}{1,5EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 100 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{280}{3} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{400}{3} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = \\
 &= -\frac{75,5}{EI}.
 \end{aligned}$$

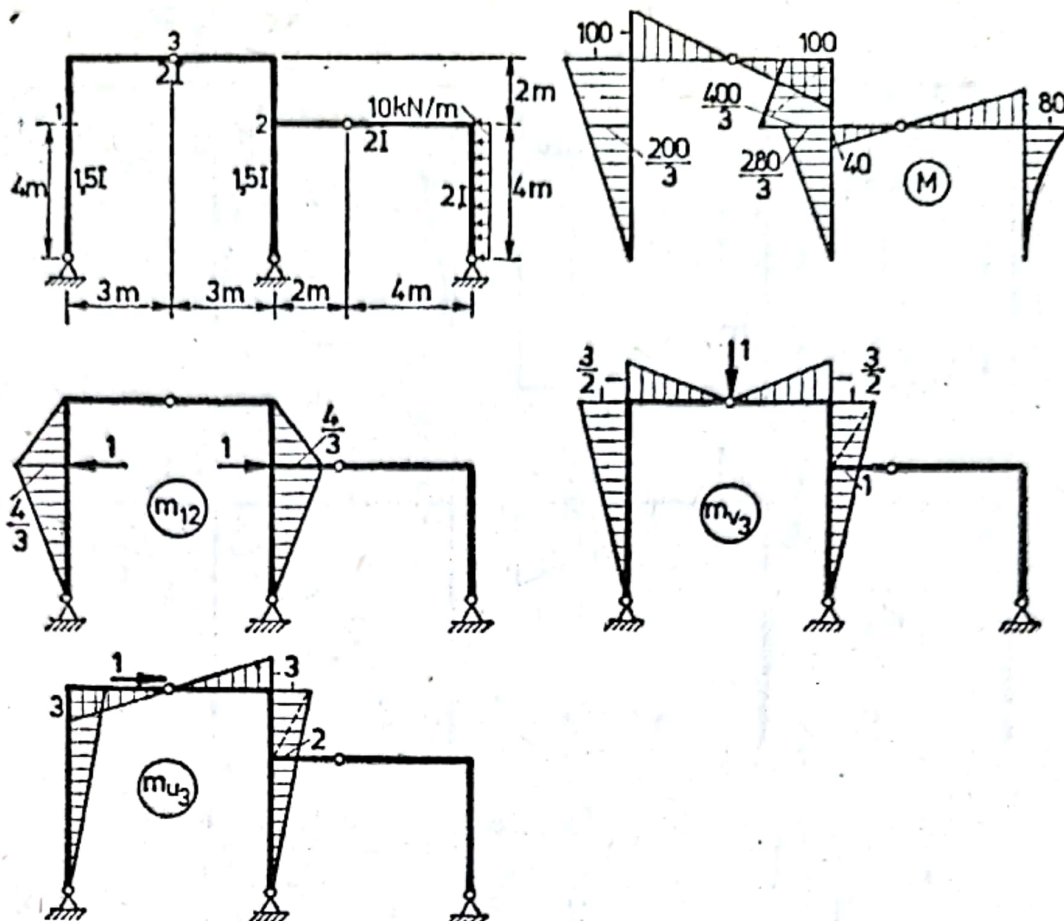


Fig. 8.7

$$u_3' = \frac{1}{1.5EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 100 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{280}{3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{400}{3} + \frac{1}{3} \cdot 100 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 100 + \frac{1}{3} \cdot \frac{400}{3} \right) \right] - \\ - \frac{1}{2EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 100 = -\frac{1245}{EI}.$$

Problema 8.8. Să se determine rotirile θ_5 și θ_4^{rel} la structura din figura 8.8.

$$\theta_5 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) + \\ + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{60 \cdot 2^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \frac{60 \cdot 8^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1000}{EI}.$$

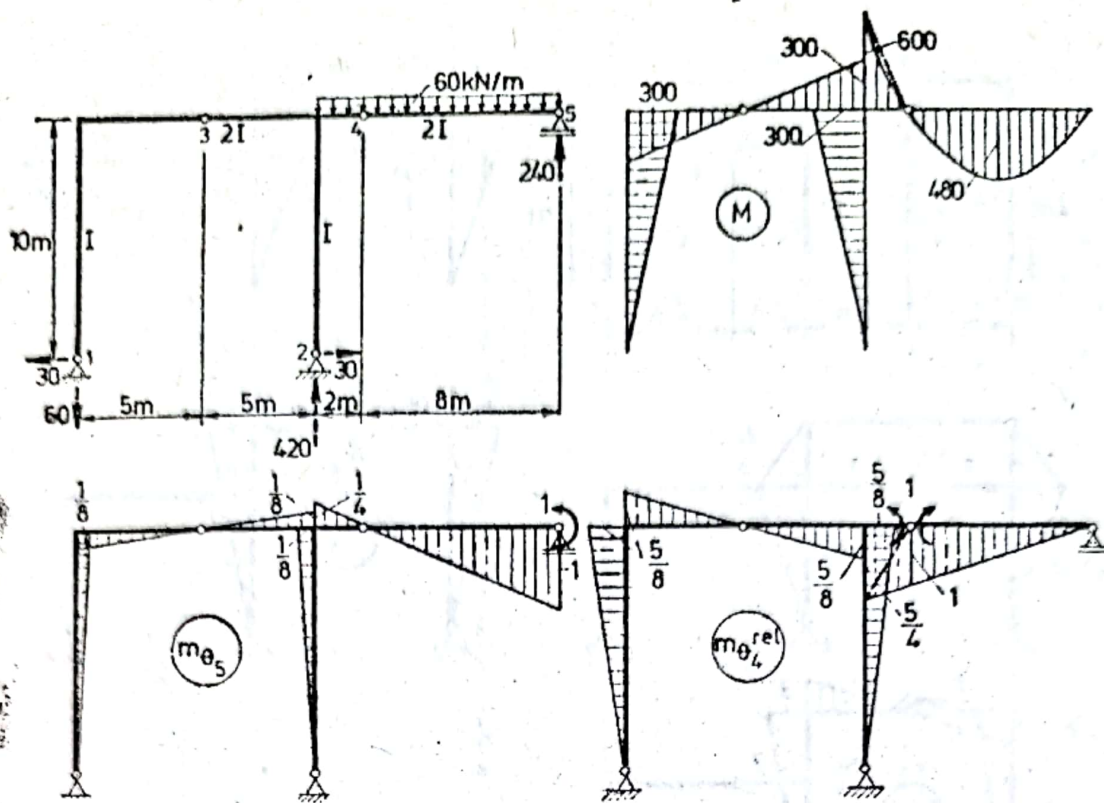


Fig. 8.8

$$\begin{aligned} \theta_4^{rel} = & \frac{1}{EI} \left(-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 300 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \right) + \\ & + \frac{1}{2EI} \left[\frac{2}{3} \cdot 8 \cdot \frac{60 \cdot 8^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 600 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] + \\ & + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{60 \cdot 2^2}{8} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \Bigg] = - \frac{1256,25}{EI} \end{aligned}$$

Problema 8.9. Să se determine deplasările u_{12} și θ_3^{rel} la structura simetrică din figura 8.9.

Deplasarea relativă dintre punctele 1 și 2 se obține introducând câte o forță egală cu unitatea în fiecare dintre cele două puncte. Cele două forțe au direcția 1–2 și sînt de sensuri contrare.

$$\begin{aligned} u_{12} = & \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{3} \cdot 2 + \\ & + \frac{1}{1,5EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{640}{EI} \end{aligned}$$

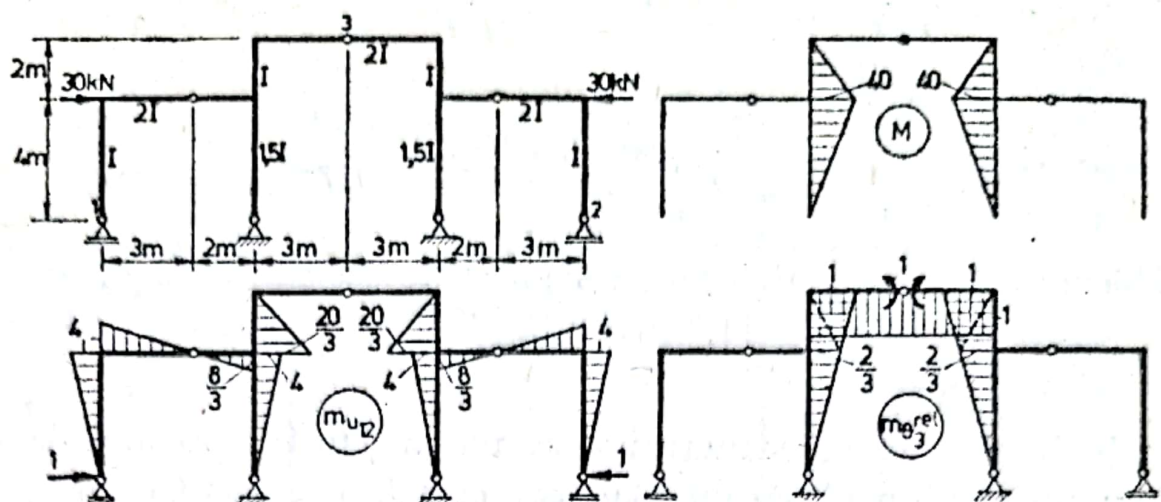


Fig. 8.9

$$\theta_3^{rel} = \frac{1}{1,5EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \cdot 2 = \frac{110}{EI}$$

Structura este simetrică și încărcată simetric.

Diagrama M rezultă simetrică. Pentru calculul deplasărilor simetrice u_{12} și θ_3^{rel} , calculul se poate efectua pe jumătate de structură, multiplicând fiecare termen, sau rezultatul final, cu 2.

Problema 8.10. Să se determine deplasările elastice v_3 și θ_3^{rel} la structura din figura 8.10.

$$v_3 = \frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2 \cdot 2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} +$$

$$+ \frac{2}{2EI} \cdot 90 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{433,12}{EI}$$

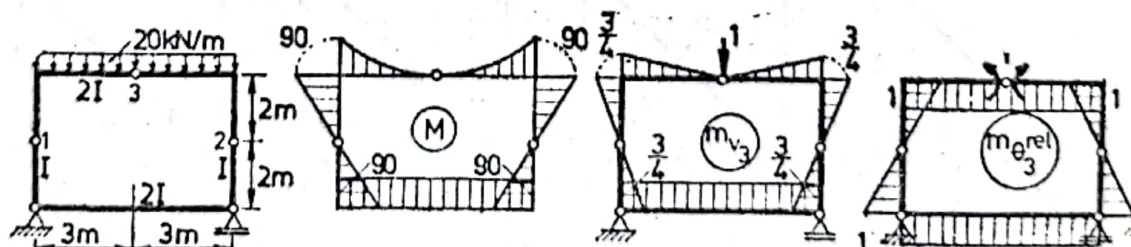


Fig. 8.10

$$\theta_3^{\text{rel}} = -\frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 90 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 -$$

$$-\frac{2}{2EI} \cdot 90 \cdot 3 \cdot 1 = -\frac{600}{EI}.$$

Problema 8.11. Să se determine deplasările elastice u_3 și θ_{34} la structura din figura 8.11, alcătuită din bare articulate. Barele au aceeași secțiune, A .

În barele acestei structuri apar numai eforturi axiale, de aceea pentru calculul deplasărilor elastice, cu relația Maxwell-Mohr, se va păstra doar termenul corespunzător, adică

$$\Delta_i = \int \frac{n_i N_j}{EA} dx.$$

Barele fiind cu secțiune constantă, iar eforturile fiind constante pe fiecare bară, integrala se transformă într-o sumă de forma

$$\Delta_i = \sum_1^b \frac{n_i N_j l_{km}}{EA_{km}},$$

b fiind numărul de bare.

Calculul se organizează într-un tabel, pentru ușurința controlului și urmăririi calculului (tabelul 8.1).

Pentru determinarea rotirii unei bare se introduce un cuplu de valoare 1, al cărui braț de pîrghie este tocmai lungimea barei respective, forțele aplicate în noduri avînd mărimea $1/l_{km}$.

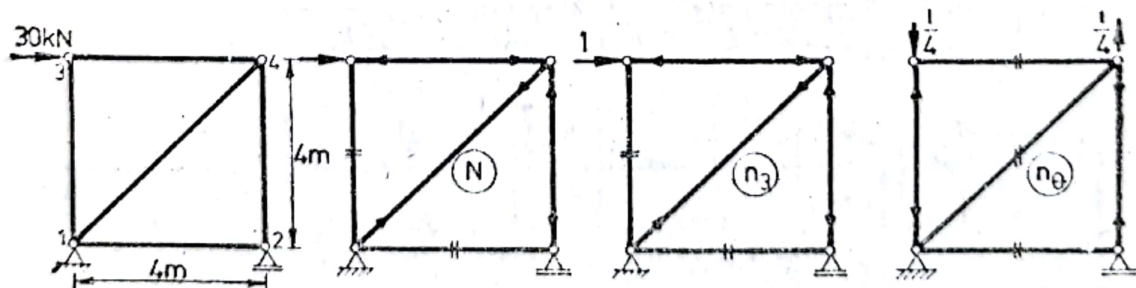


Fig. 8.11

Tabelul 8.1

Bara	l	A	N	n_3	n_0	$\frac{n_3 N l}{EA}$	$\frac{n_0 N l}{EA}$
1-2	4	A	0	0	0	0	0
1-3	4	A	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	0
1-4	$4\sqrt{2}$	A	$30\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\frac{240\sqrt{2}}{EA}$	0
2-4	4	A	-30	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{120}{EA}$	$-\frac{30}{EA}$
3-4	4	A	-30	-1	0	$\frac{120}{EA}$	0
						$\Sigma = \frac{240(1+\sqrt{2})}{EA}$	$\Sigma = -\frac{30}{EA}$

$$u_3 = \frac{240(1+\sqrt{2})}{EA} = \frac{579,4}{EA},$$

$$\theta_{34} = -\frac{30}{EA}.$$

Problema 8.12. Să se determine deplasările elastice θ_3^{rel} și θ_1 la structura din figura 8.12, deplasări produse de variația de temperatură indicată. Se dau: $h_s = 0,4$ m, $h_r = 0,5$ m, $\alpha = 10^{-5}$.

Deplasările elastice în cazul încărcării exterioare variație de temperatură, se determină cu relația

$$[\Delta_i = \int \alpha n_i t_m dx + \int \alpha m_i \frac{\Delta t}{h} dx.$$

Remarcă: α , t_m și Δt sînt constante pe fiecare bară și ies de sub semnul integrală, iar $\int n_i dx$ și $\int m_i dx$ reprezintă suprafața diagramei de efort axial, respectiv de moment încovoietor pe fiecare bară.

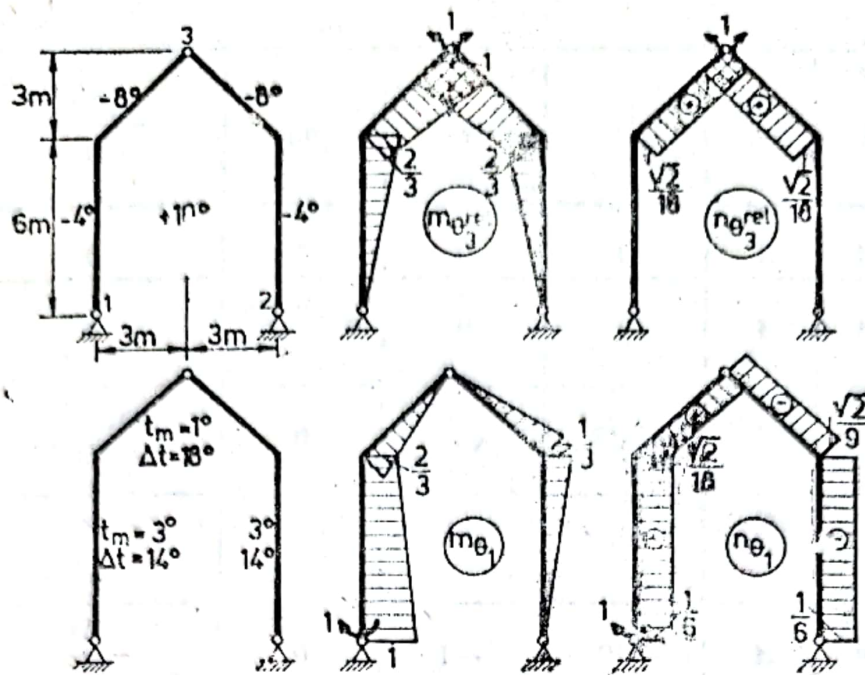


Fig. 8.12

$$\theta_3^{\text{rel}} = \alpha \left[2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{14}{0,4} + 2 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{2} \cdot \frac{18}{0,5} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot 3 \sqrt{2} \cdot 4 \right] = 3,95 \cdot 10^{-3} \text{ rad},$$

$$\theta_1 = \alpha \left[\frac{\frac{2}{3} + 1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{10}{0,4} + \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{0,5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \sqrt{2} \cdot \frac{18}{0,5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{14}{0,4} + \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 + \frac{\sqrt{2}}{18} \cdot 3 \sqrt{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot 3 \sqrt{2} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 \right] = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ rad}.$$

Se atrage atenția asupra modului de stabilire a semnului fiecărui termen.

Pentru termenii de forma $\int \alpha n t_m dx$, dacă efectul temperaturii medii t_m este de același sens cu efectul forței axiale, semnul este plus, în caz contrar semnul este minus.

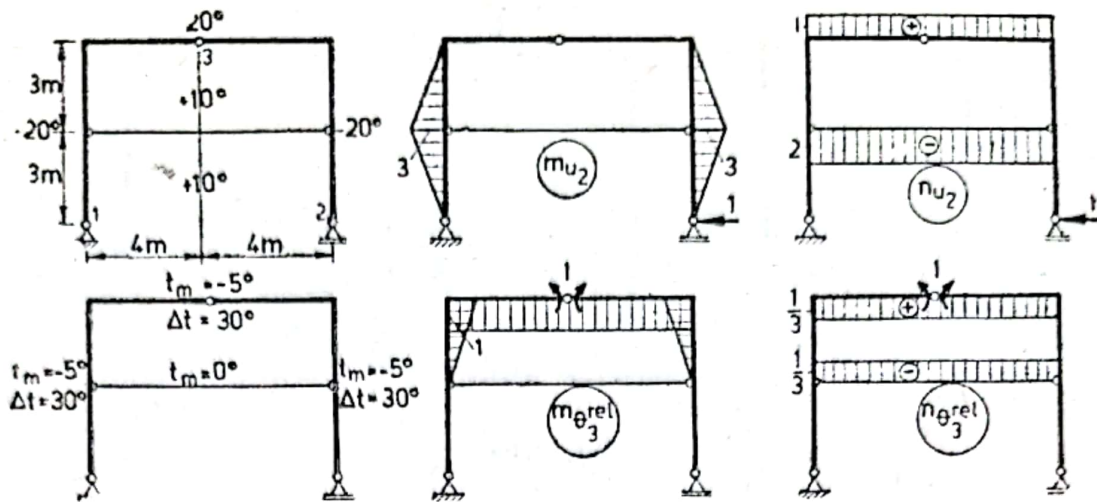


Fig. 8.13

Pentru termenii de forma $\int \alpha m_i \frac{t}{h} dx$, se stabilește fibra întinsă atât de variația de temperatură cât și de momentul încovoietor m_i . Dacă ambele efecte alungesc aceeași fibră, semnul este plus, în caz contrar semnul este minus.

Problema 8.13. Să se determine deplasările elastice u_2 și θ_3^{rel} la structura din figura 8.13, produse de variația de temperatură ($h_s = 0,5$ m, $h_r = 0,75$ m, $\alpha = 10^{-5}$).

$$u_2 = \alpha \left[-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{30}{0,5} - 1 \cdot 8 \cdot 5 \right]$$

$$u_2 = 1,120 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,12 \text{ cm}$$

$$\theta_3^{rel} = \alpha \left[2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{30}{0,75} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{30}{0,5} - \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 5 \right]$$

$$\theta_3^{rel} = 1,460 \cdot 10^{-2} \text{ rad.}$$

Problema 8.14. Să se determine deplasările elastice v_3 și θ_2 la structura din figura 8.14, produse de cedările din reazem indicate ($\varphi = 1^\circ$, $\Delta v = 2$ cm).

Expresia deplasării elastice în acest caz este

$$\Delta_i = -\sum r_{ki} \Delta_k.$$

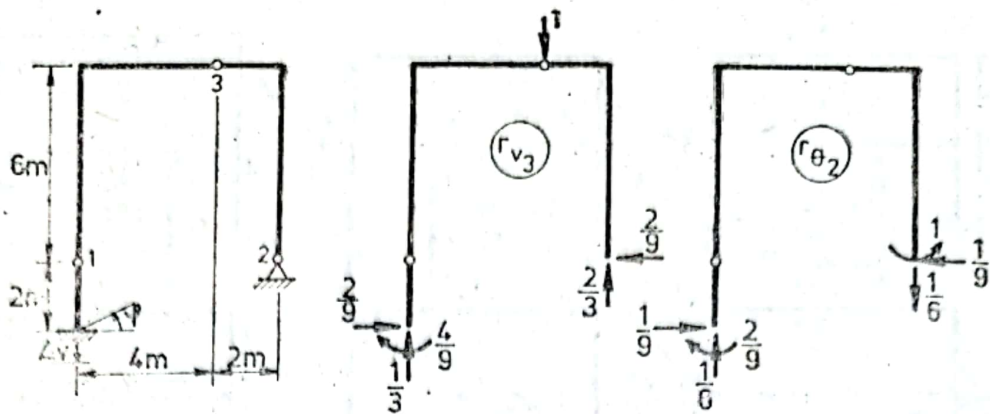


Fig. 8.14

Calculul se efectuează astfel: se determină reacțiunile r_{hi} provenite din încărcarea cu forța unitate, introdusă pe direcția i , și apoi se scrie lucrul mecanic produs de aceste reacțiuni parcurgând cedările reazemelor respective. Lucrul mecanic total cu semni schimbat reprezintă valoarea deplasării U_i .

$$v_3 = - \left(- \frac{1}{3} \cdot 0,02 - \frac{4}{9} \cdot 0,0174 \right) = 0,0144 \text{ m} = 1,44 \text{ cm.}$$

Rotirea s-a transformat în radiani; $1^\circ = 0,0174 \text{ rad.}$

$$\theta_2 = - \left(- \frac{1}{6} \cdot 0,02 - \frac{2}{9} \cdot 0,0174 \right) = 0,0072 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = 0,41^\circ.$$

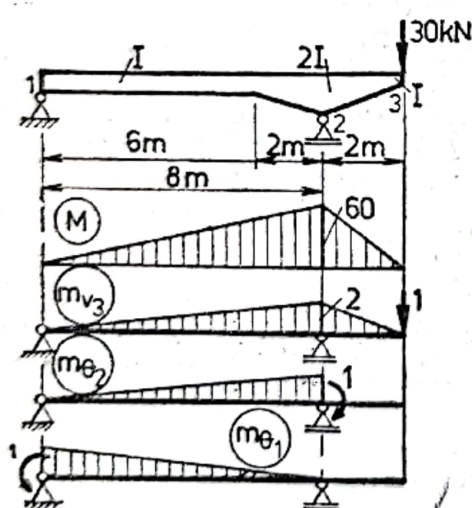


Fig. 8.15

Problema 8.15. Să se determine deplasările elastice v_3 , θ_2 și θ_1 la grinda cu secțiune variabilă din figura 8.15. vuta este dreaptă.

Pentru calcul sînt necesari coeficienții de secțiune variabilă c' , c'' și c , care se extrag din lucrarea [1] sau din volumul 2 al prezentei lucrări (anexa 2).

Bara 1-2

$$n = \frac{I}{2I} = 0,5; \quad \lambda = \frac{2}{8} = 0,25$$

$$c' = 0,819; \quad c'' = 0,998; \quad c = 0,966$$

Consola 2-3

$$n = \frac{I}{2I} = 0,5; \quad \lambda = 1$$

$$c' = 0,590; \quad c'' = 0,835; \quad c = 0,700.$$

Deplasarea pe verticală a secțiunii 3,

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 \cdot 0,590 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 \cdot 0,819 = \\ &= \frac{309,28}{EI}. \end{aligned}$$

Rotirea secțiunii 2,

$$\theta_2 = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 \cdot 0,819 = \frac{131,04}{EI}.$$

Rotirea secțiunii 1,

$$\theta_1 = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 0,966 = \frac{77,28}{EI}.$$

Problema 8.16. Să se determine deplasarea pe orizontală, u_3 , la structura cu secțiune variabilă din figura 8.16.

Determinarea coeficienților c' , c'' și c (lucrarea [1], volumul 2 — anexa 2):

Barele 1-4 și 2-5

$$n = \frac{I}{4I} = 0,25; \quad \lambda = 1$$

$$c' = 0,348; \quad c'' = 0,697; \quad c = 0,490$$

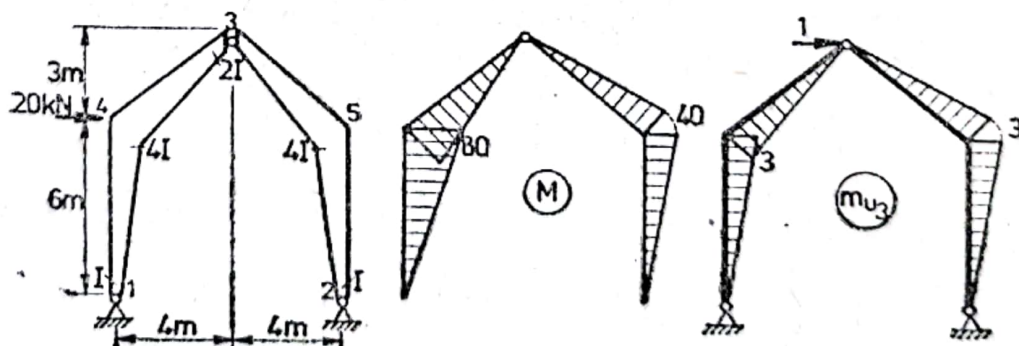


Fig. 8.16

Barle 4-3 și 5-3

$$n = \frac{2I}{4I} = 0,5; \quad \lambda = 1$$

$$c' = 0,590; \quad c'' = 0,835; \quad c = 0,700.$$

$$\begin{aligned} u_3 = & \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 80 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 0,348 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 0,348 + \\ & + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 80 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 0,590 + \\ & + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 0,590 = \frac{427,6}{EI} \end{aligned}$$

Capitolul IX

METODE ENERGETICE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR

Metodele energetice, bazate pe teoreme specifice, reprezintă un instrument deosebit de eficace în stabilirea elementelor de bază necesare calculului structurilor static nedeterminate, atât în formularea clasică cât și în formularea matriceală.

În acest capitol se prezintă teoremele energetice și aplicarea lor la rezolvarea unor cazuri tipice.

Principiul deplasărilor virtuale.

Se consideră o structură deformabilă elastic aflată în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe, căreia i se imprimă o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, aceasta putând fi o poziție deformată reală a structurii. Ca urmare, energia de deformare $W = -L_{int}$ va avea o variație $\delta W = -\delta L_{int}$, reprezentând lucrul mecanic virtual efectuat de forțele interioare prin parcurgerea deplasărilor virtuale corespunzătoare. În același timp forțele exterioare P_i , care acționează asupra structurii vor produce un lucru mecanic $\delta L_{ext} = \sum P_i \delta U_i$, unde δU_i sînt deplasările virtuale pe direcțiile forțelor P_i . Cu acestea principiul lucrului mecanic virtual se va exprima astfel

$$\delta L_{ext} + \delta L_{int} = 0$$

sau

$$\delta L_{ext} - \delta W = 0,$$

ceea ce conduce la

$$\delta L_{ext} = \delta W. \quad (IX.1)$$

Relația (IX.1) exprimă principiul deplasărilor virtuale și se anunță: *pentru o structură aflată în echilibru sub acțiunea unui sis-*

tem de forțe, variația lucrului mecanic virtual exterior este egală cu variația energiei de deformare virtuală.

Dacă se notează cu σ_i eforturile unitare ce apar datorită forțelor P_i și cu $\delta \epsilon_i$ deformațiile specifice virtuale pe direcțiile eforturilor unitare σ_i , principiul deplasărilor virtuale se mai poate exprima și sub forma

$$\sum P_i \delta U_i = \int_V \sigma_i \delta \epsilon_i dV. \quad (IX.2)$$

Teorema minimului energiei de deformare.

Dacă deplasarea virtuală ce se imprimă structurii este astfel încât prin deformare punctele de aplicație ale tuturor forțelor exterioare nu se deplasează, rezultă $\delta L_{ext} = 0$ și conform relației (IX.1) se obține

$$\delta W = 0, \quad (IX.3)$$

ceea ce indică faptul că energia de deformare reprezintă un extrem. Deoarece variația de ordinul doi a energiei de deformare este pozitivă, condiția (IX.3) arată că, în aceste condiții, energia de deformare acumulată de un sistem elastic aflat în echilibru reprezintă un minim.

Prima teoremă a lui Castigliano.

S-a văzut că $\delta W = \sum P_i \delta U_i$. De asemenea, după cum este cunoscut, creșterea infinit mică poate fi înlocuită cu diferențiala, prin neglijarea infiniților mici începând cu cei de ordinul doi. Rezultă atunci

$$dW = \sum P_i dU_i. \quad (IX.4)$$

Deoarece dW reprezintă diferențiala totală a funcției W , ea se poate scrie sub forma

$$dW = \sum \frac{\partial W}{\partial U_i} dU_i. \quad (IX.5)$$

Comparând relațiile (IX.4) și (IX.5) se obține

$$\frac{\partial W}{\partial U_i} = P_i \quad (IX.6)$$

Relația (IX.6) exprimă prima teoremă a lui Castigliano și se enunță: *derivata parțială a energiei de deformare în raport cu deplasarea U_i este egală cu forța care acționează pe direcția acestei deplasări.*

Dacă forța P_i este echivalentul mecanic al unei legături și se poate exprima în funcție de o deplasare U_j astfel

$$P_i = k_{ij} U_j, \quad (\text{IX.7})$$

atunci în baza teoremei enunțate se poate scrie

$$\frac{\partial^2 W}{\partial U_i \partial U_j} = \frac{\partial P_i}{\partial U_j} = k_{ij}, \quad (\text{IX.8})$$

unde k_{ij} reprezintă rigiditatea structurii după direcția legăturii i , cînd pe direcția j (sau a legăturii j) se introduce o deplasare egală cu unitatea. Rigiditatea k_{ij} se mai numește reacțiune unitară și se notează cu r_{ij} .

Observații

1. Se demonstrează că pentru corpurile neliniar elastice există :
— principiul forțelor virtuale, a cărui formă analitică este

$$\delta L_{ext}^* = \delta W^* \quad (\text{IX.9})$$

sau

$$\sum U_i \delta P_i = \int_V \varepsilon_i \delta \sigma_i dV, \quad (\text{IX.10})$$

- teorema de minim a energiei complementare de deformație

$$\delta W^* = 0, \quad (\text{IX.11})$$

- teorema a doua a lui Castigliano

$$\frac{\partial W^*}{\partial P_i} = U_i \quad (\text{IX.12})$$

sau, dacă $U_i = f_{ij} P_j$,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial P_i \partial P_j} = \frac{\partial U_i}{\partial P_j} = f_{ij}, \quad (\text{IX.13})$$

unde f_{ij} reprezintă flexibilitatea, respectiv deplasarea pe direcția i cînd pe direcția j acționează o forță egală cu unitatea (se mai numește deplasare unitară și se notează cu δ_{ij}).

Pentru corpurile linear elastice $W^* = W$, deci expresiile (IX.12) și (IX.13) se scriu:

$$\frac{\partial W}{\partial P_i} = U_i \text{ și } \frac{\partial^2 W}{\partial P_i \partial P_j} = f_{ij}, \quad (\text{IX.14})$$

2. Lucrul mecanic exterior și energia de deformare se pot exprima ca funcții practice de forțe sau deplasări, prin intermediul noțiunilor de rigiditate sau de flexibilitate. Astfel

$$L_{ext} = \sum P_i U_i = \sum P_i f_{ij} P_j = W \quad (\text{IX.15})$$

sau

$$L_{ext} = \sum U_i P_i = \sum U_i k_{ij} U_j = W. \quad (\text{IX.16})$$

Teoremele de reciprocitate au o mare utilitate în calculul structurilor static nedeterminate. Aceste teoreme sînt:

- teorema reciprocității lucrului mecanic al forțelor exterioare sau teorema lui Betti,
- teorema reciprocității flexibilităților (sau a deplasărilor unitare),
- teorema reciprocității rigidităților (sau a reacțiunilor unitare).

Teorema lui Betti.

Se consideră bara din figura IX.1 încărcată cu forțele P_i și P_j și se evaluează lucrul mecanic exterior în două variante.

1. Se încarcă grinda cu forța P_i , care produce, prin deformarea grinzii, deplasarea U_{ii} și lucrul mecanic $L_{ii} = \frac{1}{2} P_i U_{ii}$. În poziția deformată se introduce forța P_j , care produce deplasările U_{ji} și U_{jj} , rezultînd lucrul mecanic $L_{ij} + L_{ii} = P_i U_{ij} + \frac{1}{2} P_j U_{jj}$.

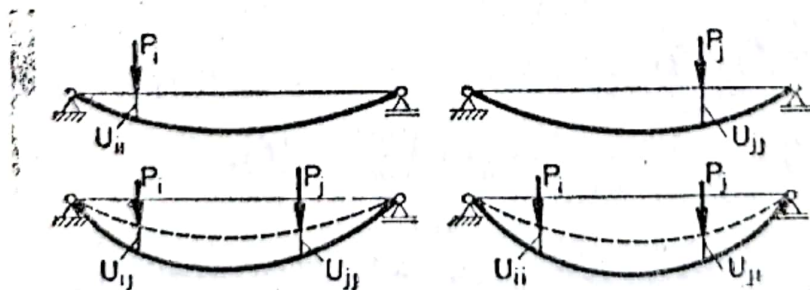


Fig. IX.1

Lucrul mecanic total va fi

$$L_1 = L_u + L_{ij} + L_{ji} = \frac{1}{2} P_i U_{ii} + P_i U_{ij} + \frac{1}{2} P_j U_{jj}. \quad (\text{IX.17})$$

2. Se încarcă grinda cu forța P_j , care produce, prin deformarea grinzii, deplasarea U_{jj} și lucrul mecanic $L_{jj} = \frac{1}{2} P_j U_{jj}$. În poziția deformată se introduce forța P_i , care produce deplasările U_{ji} și U_{ii} , rezultând lucrul mecanic $L_{ji} + L_{ii} = P_i U_{ji} + \frac{1}{2} P_i U_{ii}$.

Lucrul mecanic total va fi

$$L_2 = L_{jj} + L_{ji} + L_{ii} = \frac{1}{2} P_j U_{jj} + P_i U_{ji} + \frac{1}{2} P_i U_{ii}. \quad (\text{IX.18})$$

Deoarece lucrul mecanic total este același, rezultă $L_1 = L_2$, deci

$$L_{ij} = L_{ji} \quad (\text{IX.19})$$

sau

$$P_i U_{ij} = P_j U_{ji}. \quad (\text{IX.20})$$

Relația (IX.19) reprezintă teorema reciprocității lucrului mecanic și se enunță astfel: *lucrul mecanic efectuat de sistemul de forțe P_i , parcurgînd deplasările produse pe direcțiile lor de sistemul de forțe P_j , este egal cu lucrul mecanic efectuat de sistemul de forțe P_j , parcurgînd deplasările produse pe direcțiile lor de sistemul de forțe P_i .*

Teorema lui Betti se utilizează în demonstrarea celorlalte două teoreme de reciprocitate.

Teorema reciprocității flexibilităților (deplasărilor unitare).

Scriind relația (IX.20) sub forma

$$\frac{U_{ij}}{P_j} = \frac{U_{ji}}{P_i} \quad (\text{IX.21})$$

și ținînd seama de relația deplasare-forță, rezultă

$$f_{ij} = f_{ji} \text{ (sau } \delta_{ij} = \delta_{ji}). \quad (\text{IX.22})$$

Relația (IX.22) reprezintă teorema reciprocității flexibilităților și se enunță: *deplasarea pe direcția i , produsă de o forță egală cu unitatea acționînd pe direcția j , este egală cu deplasarea pe direcția j , produsă de o forță egală cu unitatea acționînd pe direcția i .*

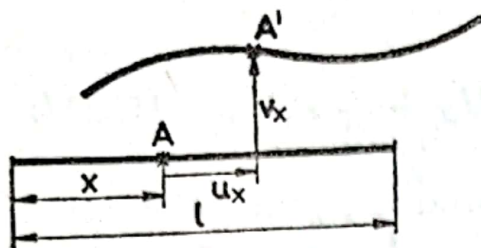


Fig. IX.2

Teorema reciprocității rigidităților (reacțiilor unitare). Scriind relația (IX.20) sub forma

$$\frac{P_j}{U_{ij}} = \frac{P_i}{U_{ji}} \quad (\text{IX.23})$$

și ținând seama de relația forță — deplasare, rezultă

$$k_{ji} = k_{ij} \text{ (sau } r_{ji} = r_{ij}). \quad (\text{IX.24})$$

Relația (IX.24) reprezintă teorema reciprocității rigidităților și se enunță: *forța care ia naștere în legătura i, produsă de o deplasare egală cu unitatea ce are loc pe direcția legăturii j, este egală cu forța care ia naștere în legătura j, produsă de o deplasare egală cu unitatea ce are loc pe direcția legăturii i.*

Această teoremă se aplică numai structurilor static nedeterminate.

Expresia energiei de deformare funcție de deplasări.

Considerînd o bară în poziție inițială și poziție deformată (fig. IX.2), energia de deformare se poate exprima funcție de deplasările secțiunii curente, u_x și v_x și apoi funcție de deplasările capetelor barei (acest ultim aspect se va trata în cursul aplicațiilor).

! Energia de deformare are forma generală

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV. \quad (\text{IX.25})$$

Avînd în vedere că $\sigma_x = E\epsilon_x$, iar pentru bara sollicitată la încovoiere cu forță axială

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, \quad (\text{IX.26})$$

energia de deformare devine

$$W = \frac{E}{2} \int_V \epsilon_x^2 dV = \frac{E}{2} \int_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right)^2 dV. \quad (\text{IX.27})$$

Observînd că:

$$\int_A y dA = 0 \quad \text{și} \quad \int_A y^2 dA = I,$$

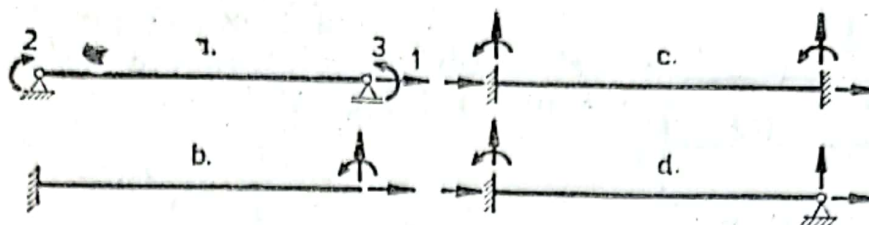


Fig. IX.3

rezultă forma definitivă

$$W = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (\text{IX.28})$$

de unde se constată că energia de deformare este funcție pătratică de deplasările secțiunii curente.

Pentru exprimarea energiei de deformare funcție de deplasări sau eforturi și implicit pentru determinarea flexibilităților sau rigidităților unei bare, este necesar să se adopte un sistem de coordonate, prin care se indică direcția acțiunii și sensul acesteia. În figura IX.3. sînt date cîteva exemple de sisteme de coordonate atașate unei bare. În figura IX.3, a și b sînt reprezentate sistemele de coordonate utilizate în calculul flexibilităților barei, iar în figura IX.3 c și d sînt reprezentate sistemele de coordonate utilizate în calculul rigidităților barei.

Elementele expuse în acest capitol vor fi utilizate în formularea matriceală a calculului structurilor.

APLICAȚII

Problema 9.1. Să se determine energia de deformare acumulată de bara din figura 9.1 și deplasarea pe direcția forței concentrate.

Energia de deformare în acest caz se determină luînd în considerație numai efectul momentului încovoietor.

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2}{EI} \left(\frac{P}{2} x \right)^2 dx,$$

$$W = \frac{P^2 l^3}{96EI}.$$

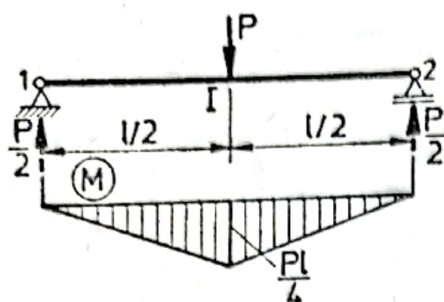


Fig. 9.1

Deplasarea produsă pe direcția forței P se obține folosind cea de a doua teoremă a lui Castigliano,

$$\frac{\partial W}{\partial P_i} = U_i.$$

În acest caz

$$v = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Pl^3}{48EI},$$

valoare cunoscută din Rezistența materialelor.

Flexibilitatea barei pe direcția forței P este

$$\frac{\partial v_i}{\partial P_i} = \delta_{ii}, \text{ respectiv } \delta_{ii} = \frac{l^3}{48EI}.$$

Problema 9.2. Să se determine flexibilitatea grinzii din figura 9.2, în sistemul de coordonate indicat, utilizând metoda energetică (prin integrare directă) și metoda Vereșciaghin.

Calculul prin integrare directă.

Se evaluează energia de deformare acumulată de corp sub acțiunea forțelor H , V și M ;

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx.$$

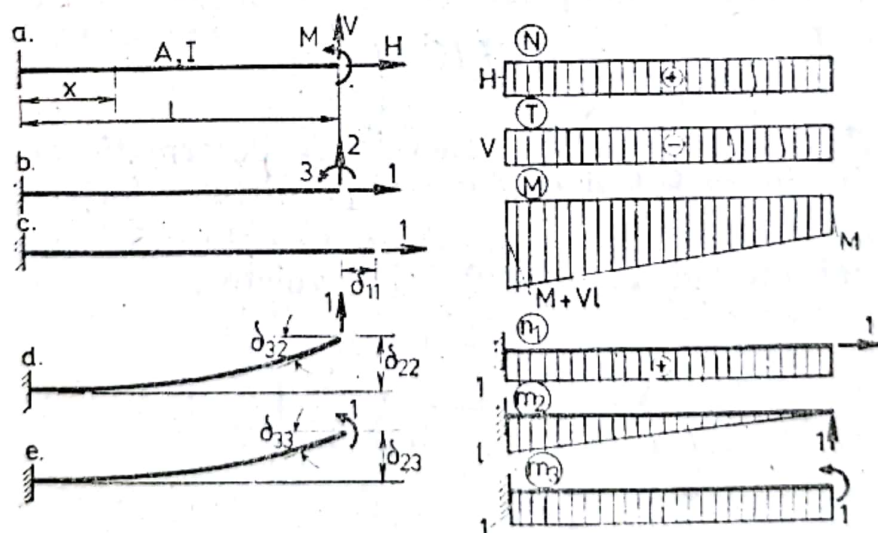


Fig. 9.2

Eforturile N și M , în secțiunea cure., au expresiile:

$$N_x = H, \quad M_x = M + (l - x).$$

Energia de deformare devine

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{EI} (M + Vl - Vx)^2 dx = \\ &= \frac{N^2 l}{2EA} + \frac{1}{2EI} \left(M^2 l + \frac{1}{3} V^2 l^3 + M V l^2 \right). \end{aligned}$$

Aplicînd a doua teoremă a lui Castigliano se obțin:

$$\frac{\partial W}{\partial H} = \frac{Hl}{EA} = u; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial H^2} = \frac{\partial u}{\partial H} = \frac{l}{EA} = \delta_{11},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial V} &= -\frac{1}{2EI} \left(\frac{2}{3} V l^3 + M l^2 \right) = v; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial V^2} = \frac{\partial v}{\partial V} = \\ &= \frac{l^3}{3EI} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial V \partial M} = \frac{\partial v}{\partial M} = \frac{l^2}{2EI} = \delta_{23}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial M} = \frac{1}{2EI} (2Ml + V l^2) = \theta; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial M^2} = \frac{l}{EI} = \delta_{33};$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial M \partial V} = \frac{\partial \theta}{\partial V} = \frac{l^2}{2EI} = \delta_{32}.$$

Din rezultatele obținute rezultă $\delta_{23} = \delta_{32}$, conform teoremei reciprocității deplasărilor unitare.

Calculul prin metoda Vereșciaghin.

Se încarcă bara cu forțe unitate pe direcțiile coordonatelor 1, 2 și 3 și se trasează diagramele de eforturi n_1 , m_2 și m_3 .

$$\delta_{11} = \int \frac{n_1^2}{EA} dx = \frac{1}{EA} \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EA},$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EI},$$

$$\delta_{33} = \int \frac{m_3^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EI}.$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot 1 = \frac{l^2}{2EI}.$$

S-au obținut aceleași rezultate.

Cu elementele calculate se poate alcătui matricea de flexibilitate a barei:

$$\delta = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Problema 9.3. Să se determine matricea de flexibilitate a barei din figura 9.3, în sistemul de coordonate indicat.

Utilizând metoda Vereșciaghin se obține:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EA} dx = \frac{l}{EA},$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI},$$

$$\delta_{33} = \int \frac{m_3^2}{EI} dx = \frac{l}{3EI},$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} dx =$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l}{6EI}.$$

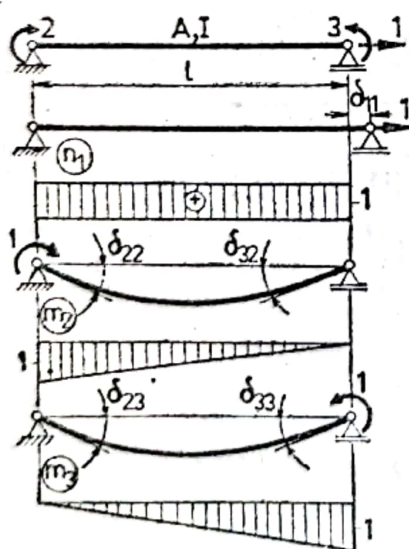


Fig. 9.3

Matricea de flexibilitate, în acest caz, are forma :

$$\delta = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ 0 & \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Problema 9.4. La bara dublu încastrată din figura 9.4, să se determine expresia analitică a formei deformate, energia de deformare acumulată de bară și rigiditatea barei pe direcția coordonatei 2, produsă de deplasarea v_2 .

Ca expresie analitică a formei deformate a barei se alege un polinom de gradul trei, deoarece pentru încărcarea cu o deplasare, momentul încovoietor variază liniar, iar forța tăietoare este constantă. Deci, câmpul de deplasări se alege de forma

$$v_x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3,$$

constantele β , β_1 , β_2 și β_3 urmînd a se determina din condițiile la limită.

Condițiile asupra momentului încovoietor și forței tăietoare se verifică imediat :

$$M = EI \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 2\beta_2 + 6\beta_3 x, \text{ (variație liniară)}$$

$$T = \frac{dM}{dx} = 6\beta_3 = \text{ct.}$$

Determinarea constantelor :

— pentru $x = 0$, $v_x = v_1$ și

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \theta_x = 0,$$

— pentru $x = l$, $v_x = 0$ și $\theta_x = 0$.

Rotirea este

$$\theta_x = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2.$$

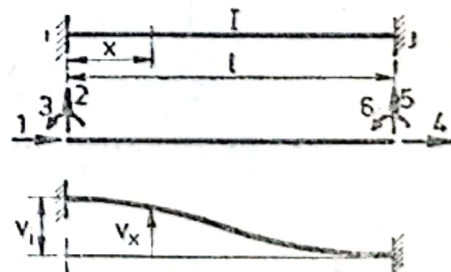


Fig. 9.4

Din prima condiție rezultă :

$$\beta = v_i, \quad \beta_1 = 0.$$

Din a doua condiție se obține sistemul :

$$\begin{cases} 0 = v_i + \beta_2 l^2 + \beta_3 l^3, \\ 0 = 2\beta_2 l + 3\beta_3 l^2, \end{cases}$$

de unde rezultă :

$$\beta_2 = -\frac{3v_i}{l^2} \quad \text{și} \quad \beta_3 = \frac{2v_i}{l^3}.$$

Cu aceste valori ale constantelor expresia analitică a deplasării pe normala la axa barei (a forme deformate) este

$$v_x = v_i - \frac{3x^2}{l^2} v_i + \frac{2x^3}{l^3} v_i$$

sau notînd $\xi = \frac{x}{l}$, rezultă

$$v_x = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i.$$

Forma deformată corespunzătoare deplasării $v_i = 1$ se numește coordonată distribuită, $\Phi_2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$.

Energia de deformație, pentru acest caz de încărcare, este

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_x^2 dV = \frac{E}{2} \int_A \int_0^l Y^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dA dx,$$

deoarece $\varepsilon_x = -y \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$.

Observînd că $\int_A Y^2 dA = I_z = I$ și $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{6}{l^2} (\xi - 1)v_i$, se obține energia de deformație acumulată de bară pentru deplasarea v_i ,

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{36}{l^4} \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^2 v_i dx = \frac{6EI}{l^3} v_i^2.$$

Deci energia de deformare este funcție patrată în v_i .

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano rezultă forța pe direcția coordonatei 2 și apoi rigiditatea (respectiv forța pe direcția coordonatei 2, pentru o deplasare egală cu unitatea),

$$\frac{\partial W}{\partial v_i} = \frac{12EI}{l^3} v_i = T_i \text{ și } \frac{\partial^2 W}{\partial v_i^2} = \frac{\partial T_i}{\partial v_i} = \frac{12EI}{l^3} = k_{22}.$$

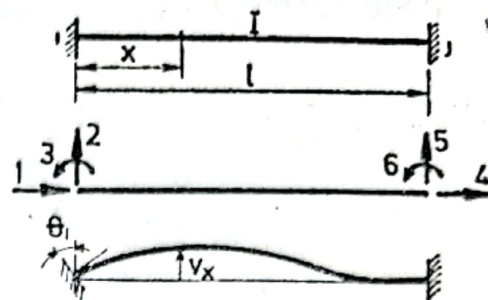


Fig. 9.5

Problema 9.5. Pentru bara dublu încastrată din figura 9.5, să se determine expresia analitică a formei deformate, energia de deformare acumulată de bară și rigiditatea barei pe direcția coordonatei 3, produse de deplasarea θ_i .

Expresia analitică a formei deformate se obține urmărind același raționament ca și la aplicația precedentă. Cîmpul de deplasări se alege de forma

$$v_x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3,$$

iar constantele se obțin din condițiile:

- pentru $x = 0$, $v_x = 0$, și $\theta_x = \theta_i$,
- pentru $x = l$, $v_x = 0$, și $\theta_x = 0$.

Expresia rotirii este

$$\theta_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2.$$

Din prima condiție rezultă:

$$\beta = 0 \text{ și } \beta_1 = \theta_i.$$

Din a doua condiție se obține sistemul de ecuații:

$$0 = \theta_i l + \beta_2 l^2 + \beta_3 l^3,$$

$$0 = \theta_i + 2\beta_2 l + 3\beta_3 l^2,$$

de unde rezultă: $\beta_2 = -\frac{2\theta_i}{l}$ și $\beta_3 = \frac{\theta_i}{l^2}$.

Cu aceste valori ale constantelor, câmpul de deplasări are forma

$$v_x = \theta_i x - \frac{2x^2}{l} \theta_i + \frac{x^3}{l^2} \theta_i$$

sau, notînd $\xi = \frac{x}{l}$,

$$v_x = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l\theta_i.$$

Coordonata distribuită Φ_3 , obținută pentru $\theta_i = 1$, are forma

$$\Phi_3 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3.$$

Energia de deformație are expresia

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Deoarece $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \left(-\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \theta_i$, energia W se scrie

$$W = \frac{2EI}{l} \theta_i^2.$$

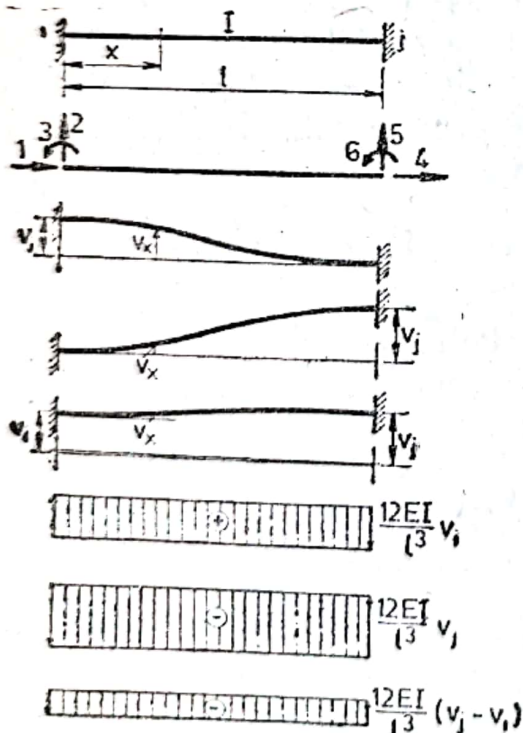


Fig. 9.6

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano rezultă momentul încovoietor M_i , din capătul i al barei și apoi rigiditatea pe direcția coordonatei 3 (momentul încovoietor pentru o rotire $\theta = 1$),

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \theta_i} &= \frac{4EI}{l} \theta_i = M_i \quad \text{și} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_i^2} &= \frac{\partial M_i}{\partial \theta_i} = \frac{4EI}{l} = k_{33}. \end{aligned}$$

Semnul „plus” pentru M_i indică faptul că momentul încovoietor are sensul adoptat inițial și reprezentat în figură pentru coordonata 3.

Problema 9.6. Pentru bara dublu încastrată din figura 9.6, să se

determine expresia analitică a formei deformată, energia de deformație acumulată de bară și rigiditățile barci pe direcțiile coordonatelor 2 și 5, produse de deplasările v_i și v_j . Considerînd $v_j > v_i$ să se traseze diagramele de forță tăietoare produsă de încărcările cu v_i , cu v_j și apoi pentru efectul cumulat.

Cîmpul de deplasări are forma utilizată anterior

$$v_x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3.$$

Constantele se calculează din condițiile:

— pentru $x = 0$, $v_x = v_i$, $\theta_x = 0$,

— pentru $x = l$, $v_x = v_j$, $\theta_x = 0$.

Expresia rotirii fiind $\theta_x = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2$, se obține:

— din prima condiție

$$\beta = v_i, \quad \beta_1 = 0,$$

— din a doua condiție

$$\begin{cases} v_j = v_i + \beta_2 l^2 + \beta_3 l^3, \\ 0 = 2\beta_2 + 3\beta_3 l^2 \end{cases}$$

și expresiile constantelor $\beta_2 = -\frac{3(v_i - v_j)}{l^2}$ și $\beta_3 = \frac{2(v_i - v_j)}{l^3}$.

Cu aceste valori ale constantelor, cîmpul de deplasări devine

$$v_x = v_i - \frac{3(v_i - v_j)}{l^2} x^2 + \frac{2(v_i - v_j)}{l^3} x^3$$

sau, cu notația $\xi = \frac{x}{l}$, după gruparea termenilor,

$$v_x = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j.$$

Energia de deformație, pentru $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{6}{l^2} (\xi - 1)v_i + \frac{6}{l^2} (1 - \xi)v_j$,

are forma

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{36}{l^2} [(\xi - 1)v_i - (\xi - 1)v_j]^2 dx = \frac{6EI}{l^3} (v_i^2 - 2v_i v_j + v_j^2).$$

Din expresia energiei rezultă că dacă $v_i = v_j$, se obține $W = 0$. Deci bara se translatează fără să se deformeze și nu apar eforturi. Dacă cele două deplasări se produc în sensuri diferite, efectele lor se cumulează.

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano se calculează succesiv:

$$\frac{\partial W}{\partial v_i} = \frac{12EI}{l^3} (v_i - v_j) = T_i, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial v_i^2} = \frac{12EI}{l^3} = k_{22},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial v_i \partial v_j} = -\frac{12EI}{l^3} = k_{25}, \quad \frac{\partial W}{\partial v_j} = \frac{12EI}{l^3} (v_j - v_i) = T_j,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial v_j^2} = \frac{12EI}{l^3} = k_{55}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial v_i \partial v_j} = -\frac{12EI}{l^3} = k_{52}.$$

Rezultă $k_{25} = k_{52}$, conform teoremei reciprocității rigidităților (reacțiunilor unitare). Semnul „minus” pentru k_{25} și k_{52} indică faptul că forțele tăietoare corespunzătoare deplasărilor $v_i = 1$ și $v_j = 1$

au sens invers celui adoptat inițial (reprezentat în figură) pentru coordonatele 2 și 5.

Problema 9.7.. Pentru bara dublu încastrată din figura 9.7, să se determine expresia analitică a formei deformată, energia de deformare acumulată de bară și rigiditățile barei pe direcțiile coordonatelor 3 și 6, produse de rotațiile θ_i și θ_j .

Cîmpul de deplasări are forma

$$v_x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3.$$

Constantele se obțin din condițiile:

- pentru $x = 0, \quad v_x = 0$
- și $\theta_x = \theta_i,$
- pentru $x = l, \quad v_x = 0$
- și $\theta_x = \theta_j.$

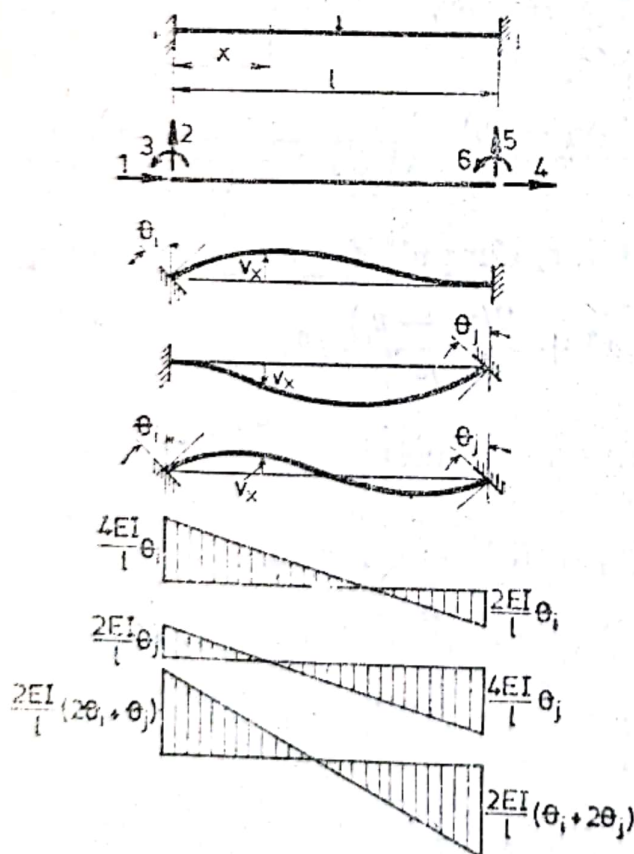


Fig. 9.7

Expresia rotirii fiind $\theta_x = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2$, se obține :

— din prima condiție

$$\beta = 0 \text{ și } \beta_1 = \theta_i,$$

— din a doua condiție

$$\begin{cases} 0 = \theta_i l + \beta_2 l^2 + \beta_3 l^3, \\ \theta_j = \theta_i + 2\beta_2 l + 3\beta_3 l^2 \end{cases}$$

și expresiile constantelor :

$$\beta_2 = -\frac{2\theta_i + \theta_j}{l} \text{ și } \beta_3 = \frac{\theta_i + \theta_j}{l^2}.$$

Cu aceste valori ale constantelor, câmpul de deplasări devine

$$v_x = \theta_i x - \frac{2\theta_i + \theta_j}{l} x^2 + \frac{\theta_i + \theta_j}{l^2} x^3$$

sau, cu notația $\xi = \frac{x}{l}$, după gruparea termenilor

$$v_x = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l\theta_i - (\xi^2 - \xi^3)l\theta_j.$$

Energia de deformație, pentru $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{2}{l} [(3\xi - 2)\theta_i + (3\xi - 1)\theta_j]$, are forma

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{4}{l^2} [(3\xi - 2)\theta_i + (3\xi - 1)\theta_j]^2 dx = \frac{2EI}{l} (\theta_i^2 + \theta_i \theta_j + \theta_j^2).$$

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano rezultă succesiv :

$$\frac{\partial W}{\partial \theta_i} = \frac{2EI}{l} (2\theta_i + \theta_j) = M_i; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_i^2} = \frac{4EI}{l} = k_{33};$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{2EI}{l} = k_{36},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta_j} = \frac{2EI}{l} (\theta_i + 2\theta_j) = M_j; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \theta_j^2} = \frac{4EI}{l} = k_{66};$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta_j \partial \theta_i} = \frac{2EI}{l} = k_{63}.$$

Rezultă $k_{36} = k_{63}$, conform teoremei de reciprocitate a rigidităților (reacțiunilor unitare).

Diagramele de momente încovoietoare pentru acțiunea separată a rotirilor și pentru acțiunea concomitentă, sînt prezentate în figura 9.7.

Observații. Cunoscînd rigiditățile pe direcțiile coordonatelor 3 și 6, se pot obține rigiditățile pe direcțiile coordonatelor 2 și 5, din condiția de echilibru static.

În cazul încărcării barei cu $\theta_i = 1$, rezultă:

$$k_{23} = \frac{1}{l} (k_{33} + k_{63}) = \frac{6EI}{l^2},$$

$$k_{53} = -\frac{1}{l} (k_{33} + k_{63}) = -\frac{6EI}{l^2}.$$

În același mod se obțin:

$$k_{26} = \frac{6EI}{l^2} \text{ și } k_{56} = -\frac{6EI}{l^2}.$$

Problema 9.8. Pentru bara dublu încastrată din figura 9.7, să se determine expresia analitică a formei deformate, energia de deformare acumulată de bară și rigiditățile barei pe direcțiile tuturor coordonatelor. Cu elementele obținute să se alcătuiască matricea de rigiditate a acestui tip de bară.

În acest caz cîmpul de deplasări are forma cea mai generală:

$$u_x = \alpha + \alpha_1 x,$$

$$v_x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3.$$

Din condițiile la limită rezultă următoarele expresii ale constantelor:

$$\alpha = u_i, \quad \alpha_1 = \frac{u_j - u_i}{l}$$

$$\beta_0 = v_i, \quad \beta_1 = \theta_i, \quad \beta_2 = \frac{3(v_j - v_i) - l(2\theta_i + \theta_j)}{l^2},$$

$$\beta_3 = \frac{2(v_i - v_j) + l(\theta_i + \theta_j)}{l^3}.$$

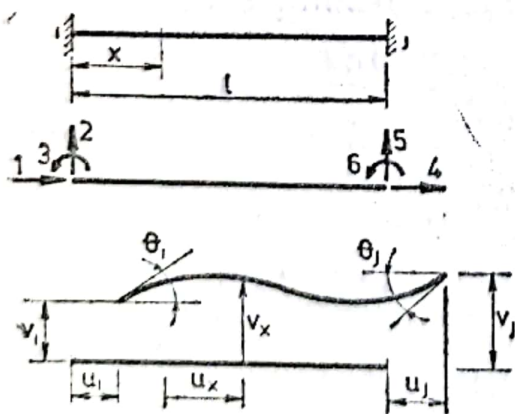


Fig. 9.8

Cu aceste valori ale constantelor, cîmpul de deplasări capătă forma :

$$u_x = (1 - \xi) u_i + \xi u_j,$$

$$v_x = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_i + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l\theta_i + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_j - (\xi^2 - \xi^3)l\theta_j.$$

Energia de deformație, în acest caz de încărcare, are forma (9.28),

$$W = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right)^2 dx,$$

unde introducînd :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{l} (u_j - u_i),$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} [6(2\xi - 1)v_i - 2(2 - 3\xi)l\theta_i - 6(2\xi - 1)v_j - 2(1 - 3\xi)l\theta_j]$$

se obține expresia

$$W = \frac{EA}{l} (u_j - u_i)^2 + \frac{2EI}{l^3} (3v_i^2 + l^2 \theta_i^2 + 3v_j^2 + l^2 \theta_j^2 + 3lv_i \theta_i - 6v_i v_j + 3lv_j \theta_j - 3l\theta_i v_j + l^2 \theta_i \theta_j - 3lv_j \theta_j).$$

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano rezultă rigiditățile pe direcțiile celor șase coordonate, rigidități cu care s-a alcătuit matricea de rigiditate k ,

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Observații. Dacă se iau în considerație numai coordonatele 1 și 4, ceea ce corespunde cazului barei dublu articulate, matricea de rigiditate va avea forma:

$$k = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dacă se iau în considerație numai coordonatele 2, 3, 5 și 6, matricea de rigiditate va avea forma:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Matricea de rigiditate în forma generală este o matrice singulară (determinantul său este egal cu zero), deoarece elementele sale nu sînt liniar independente, între ele existînd trei relații de legătură (relațiile de echilibru static).

Eliminînd trei coordonate și păstrînd numai trei, respectiv coordonatele 4, 5 și 6, se obține:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^2} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Aceste trei coordonate sînt cele utilizate la aplicația 9.2, pentru determinarea matricei de flexibilitate a barei cu capătul i încastrat și cu capătul j liber.

Se poate arăta imediat că între matricele k și δ există relația

$$k^{-1} = \delta \text{ sau } k = \delta^{-1} \text{ sau } k\delta = I.$$

Problema 9.9. Pentru bara încastrată — articulată, din figura 9.9, să se determine expresia analitică a formei deformată, energia acumulată de bară și rigiditatea barei pe direcția coordonatei 2, produse de deplasarea v_1 .

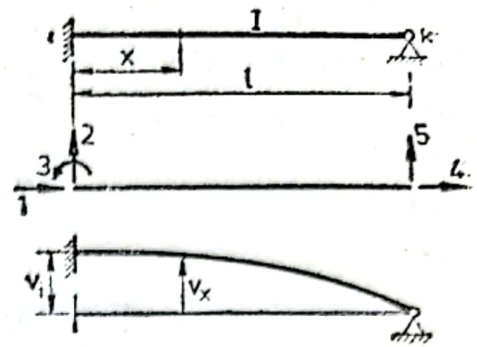


Fig. 9.9

Cîmpul de deplasări se alege de forma utilizată anterior,

$$v_x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3.$$

Constantele se obțin din condițiile:

- pentru $x = 0$, $v_x = v_1$ și $\theta_x = 0$
- pentru $x = l$, $v_x = 0$ și $M_j = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$.

Avînd în vedere că

$$\theta_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2,$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 2\beta_2 + 6\beta_3 x,$$

se obțin următoarele valori:

- din prima condiție

$$\beta = v_1, \quad \beta_1 = 0$$

- din a doua condiție

$$\begin{cases} 0 = v_1 + \beta_2 l^2 + \beta_3 l^3 \\ 0 = 2\beta_2 + 6\beta_3 l \end{cases}$$

și expresiile constantelor $\beta_2 = -\frac{3v_1}{2l^2}$ și $\beta_3 = \frac{v_1}{2l^3}$.

Cu aceste valori ale constantelor, cîmpul de deplasări devine

$$v_x = v_1 - \frac{3v_1}{2l^2} x^2 + \frac{v_1}{2l^3} x^3$$

sau, cu notația $\xi = \frac{x}{l}$,

$$v_x = \frac{1}{2} (2 - 3\xi^2 + \xi^3) v_i.$$

Coordonata distribuită Φ_2 are expresia $\Phi_2 = \frac{1}{2} (2 - 3\xi^2 + \xi^3)$.

Energia de deformare, când $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{3}{l^2} (\xi - 1) v_i$, este

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{9}{4} (\xi - 1)^2 v_i^2 d\xi = \frac{3EI}{2l^3} v_i^3.$$

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano se găsește succesiv

$$\frac{\partial W}{\partial v_i} = \frac{3EI}{l^3} v_i = T_i \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial v_i^2} = \frac{\partial T_i}{\partial v_i} = \frac{3EI}{l^3} = k_{22}.$$

Problema 9.10. Pentru bara încastrată — articulată, din figura 9.10, să se determine expresia analitică a formei deformată, energia de deformare acumulată de bară și rigiditatea barei pe direcția coordonatei 3, produse de rotirea θ_i .

Cîmpul de deplasări se alege de forma

$$v_x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3.$$

Constantele se obțin din condițiile:

— pentru $x=0$, $v_x=0$ și $\theta_x = \theta_i$

— pentru $x=l$, $v_x=0$ și $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$

$$\text{cu } \theta_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 2\beta_2 + 6\beta_3 x.$$

Introducînd în expresia cîmpului de deplasări se obține:

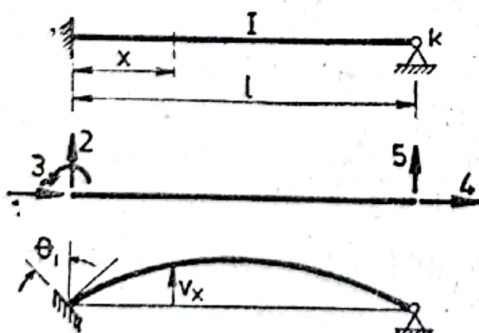


Fig. 9.10

— din prima condiție

$$\beta = 0, \quad \beta_1 = \theta_i,$$

— din a doua condiție

$$\begin{cases} 0 = \theta_i l + \beta_2 l^2 + \beta_3 l^3, \\ 0 = 2\beta_2 + 6\beta_3 l \end{cases}$$

și expresiile constantelor: $\beta_2 = -\frac{3\theta_i}{2l}$ și $\beta_3 = \frac{\theta_i}{2l^2}$.

Cu aceste valori ale constantelor, câmpul de deplasări devine

$$v_x = \theta_i x - \frac{3\theta_i}{2l} x^2 + \frac{\theta_i}{2l^2} x^3$$

sau, notînd $\xi = \frac{x}{l}$,

$$v_x = \frac{l}{2} (\xi - 3\xi^2 + \xi^3) \theta_i.$$

Coordonata distribuită Φ_3 are expresia $\Phi_3 = \frac{l}{2} (\xi - 3\xi^2 + \xi^3)$.

Energia de deformație, pentru $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{3}{l} (\xi - 1) \theta_i$, este

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{9}{l^2} (\xi - 1)^2 \theta_i^2 dx = \frac{3EI}{2l} \theta_i^2.$$

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano rezultă:

$$\frac{\partial W}{\partial \theta_i} = \frac{3EI}{l} \theta_i = M_i,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \theta_i^2} = \frac{\partial M_i}{\partial \theta_i} = \frac{3EI}{l} = k_{33}.$$

Problema 9.11. Să se determine matricea de rigiditate a barei încastate-articulate, din figura 9.11.

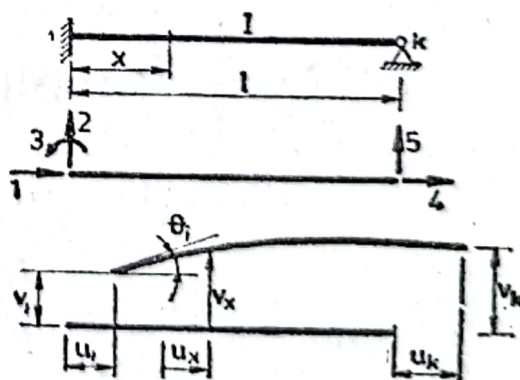


Fig. 9.11

Cîmpul de deplasări are forma :

$$u_x = \alpha + \alpha_1 x,$$

$$v_x = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3.$$

Condițiile pentru determinarea constantelor sînt :

$$- \text{ pentru } x = 0, \quad v_x = v_i, \quad \theta_x = \theta_i, \quad u_x = u_i,$$

$$- \text{ pentru } x = l, \quad v_x = v_k, \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0, \quad u_x = u_k.$$

Din aceste condiții rezultă :

$$\alpha = u_i, \quad \alpha_1 = \frac{u_k - u_i}{l}, \quad \beta = v_i, \quad \beta_1 = \theta_i,$$

$$\beta_2 = \frac{3(v_k - v_i - l\theta_i)}{2l^2} \text{ și } \beta_3 = \frac{v_i - v_k + l\theta_i}{2l^3}.$$

Astfel cîmpul de deplasări devine :

$$u_x = (1 - \xi)u_i + \xi u_k,$$

$$v_x = \frac{1}{2} [(2 - 2\xi^2 + \xi^3)v_i + (2\xi - 3\xi^2 + \xi^3)l\theta_i + (3\xi^2 - \xi^3)v_k].$$

Știind că :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{l} (u_k - u_i), \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{3}{l^2} (\xi - 1)(v_i - v_k + l\theta_i),$$

energia de deformație primește forma

$$W = \frac{EA}{2l} (u_k - u_i)^2 + \frac{3EI}{2l^3} (v_i^2 + v_k^2 - 2v_i v_k + 2lv_i \theta_i - 2lv_k \theta_i + l^2 \theta_i^2).$$

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano rezultă elementele matricii de rigiditate,

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 9.12. Să se determine matricea de rigiditate a barei articulate din figura 9.12.

Cîmpul de deplasări se alege de aceeași formă ca și la aplicația precedentă.

Condițiile la limită sînt:

$$- \text{pentru } x = 0, u_x = u_i, v_x = v_i, \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0,$$

$$- \text{pentru } x = l, u_x = u_k, v_x = v_k, \theta_x = \theta_k.$$

Din aceste condiții rezultă următoarele expresii pentru constante:

$$\alpha = u_i, \alpha_1 = \frac{1}{l} (u_k - u_i), \beta = v_i,$$

$$\beta_1 = \frac{3(v_k - v_i) + l\theta_k}{2l}, \beta_2 = 0,$$

$$\beta_3 = \frac{v_i - v_k + l\theta_k}{2l^3}.$$

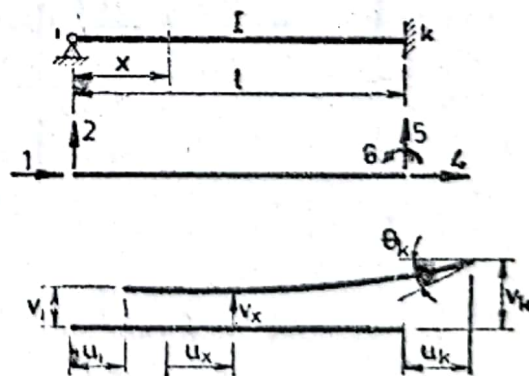


Fig. 9.12

Cu aceste valori ale constantelor, cîmpul de deplasări devine:

$$u_x = (1 - \xi)u_i + \xi u_k,$$

$$v_x = \frac{1}{2} [(2 - 3\xi^2 + \xi^3)v_i + (3\xi - \xi^3)v_k - (3\xi - \xi^3)l\theta_k].$$

Știind că:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{l} (u_k - u_i),$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \frac{3\xi}{l^2} (v_i - v_k + l\theta_k),$$

energia de deformație se scrie

$$W = \frac{EA}{2l^2} (u_k - u_i)^2 + \frac{3EI}{2l^2} (v_i^2 + v_k^2 + l^2\theta_k^2 - 2v_i v_k + 2lv_i\theta_k - 2lv_k\theta_k).$$

Aplicînd prima teoremă a lui Castigliano rezultă elementele matricei de rigiditate,

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{2EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

Structurile static nedeterminate sînt acele structuri la care numărul legăturilor este mai mare decît numărul minim necesar asigurării invariabilității geometrice și fixării față de teren. Rezultă că numărul necunoscutelor este mai mare decît numărul ecuațiilor de echilibru static și în consecință, pentru calculul acestor structuri sînt necesare ecuații suplimentare.

Numărul ecuațiilor suplimentare este egal cu numărul parametrilor liniari independenți necesari pentru definirea stării de eforturi sau a poziției deformate a structurii. Parametrii liniari independenți, corespunzători celor două aspecte ce caracterizează echilibrul structurii în poziția deformată, sînt forțele din legăturile suplimentare, respectiv deplasările posibile ale nodurilor structurii.

Metoda care utilizează ca parametri liniari independenți forțele din legăturile suplimentare se numește *metoda forțelor* sau *metoda eforturilor*. Operînd cu forțele din legăturile suplimentare condiția de echilibru static se poate exprima pentru orice serie de valori atribuite acestor forțe. Poziția reală de echilibru a structurii static nedeterminate corespunde unei singure serii de valori și anume aceleia care asigură concomitent și respectarea condiției de continuitate a deformatiei. În consecință, ecuațiile suplimentare în această metodă exprimă respectarea condiției de continuitate a deformatiei structurii pe direcția fiecărei forțe necunoscute.

Metoda care utilizează ca parametri liniari independenți deplasările posibile ale nodurilor structurii — translații și rotații — se numește *metoda deplasărilor* sau *metoda deformațiilor*. Operînd cu deplasările nodurilor, poziția deformată a structurii se poate stabili pentru orice serie de valori atribuite acestor deplasări. Poziția reală de echilibru a structurii static nedeterminate, pentru o încărcare dată, corespunde acelei serii de valori pentru care este satisfăcută concomitent și condiția de echilibru static. În consecință, ecuațiile suplimentare în această metodă exprimă satisfacerea condiției de echilibru static pe direcția fiecărei necunoscute.

Utilizarea uneia sau alteia dintre metode depinde de avantajele pe care le prezintă în calculul diferitelor tipuri de structuri.

METODA FORȚELOR

Capitolul X

PRINCIPIILE METODEI FORȚELOR

A. CADRE STATIC NEDETERMINATE

Metoda forțelor utilizează ca necunoscute forțele din legăturile suplimentare. Numărul acestor necunoscute este egal cu *gradul de nedeterminare statică*.

Nedeterminarea statică este exterioară (fig. X.1, a și b), interioară (fig. X.1, c și d) sau mixtă (fig. X.1, e și f).

Gradul de nedeterminare statică se poate stabili în mai multe moduri. Cel mai direct mod este eliminarea succesivă a câte unei legături simple pînă se ajunge la o structură static determinată. Numărul legăturilor simple eliminate reprezintă gradul de nedeterminare statică.

Alt procedeu este procedeul contururilor închise. Orice contur închis între bare continue, sau între bare și baza de rezemare (reaze-

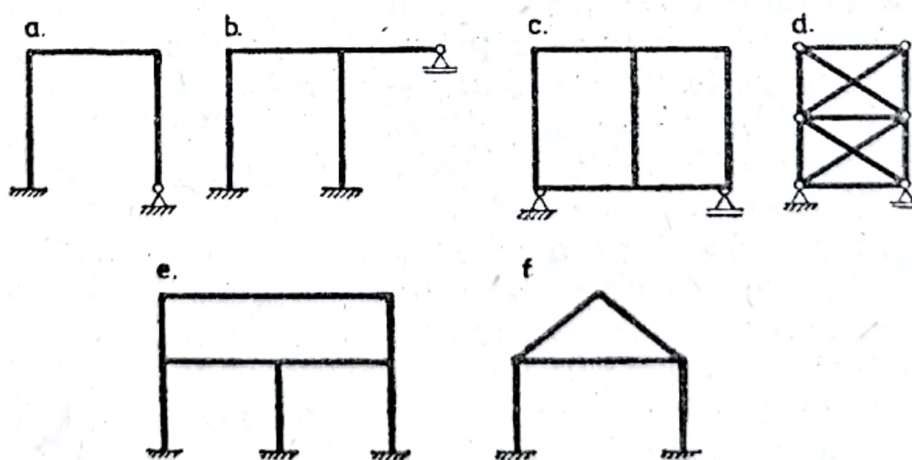


Fig. X.1

mele fiind încastrări perfecte), reprezintă un sistem de trei ori static nedeterminat. O articulație simplă inserată în conturul închis reprezintă o legătură simplă mai puțin, iar un reazem simplu două legături simple mai puțin.

Rezultă că pentru o structură care are C contururi închise, A articulații simple și S reazeme simple, gradul de nedeterminare statică este dat în relația

$$N = 3 C - A - 2 S. \quad (\text{X.1.})$$

Un contur se consideră ca atare dacă cel puțin una dintre bare nu a fost inclusă într-un alt contur. De exemplu, structura din figura X.1, b are 2 contururi și un reazem simplu, deci $N = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$, iar structura din figura X.1, e are 3 contururi perfecte, deci $N = 9$.

În cazul grinzilor cu zăbrele este de preferat ca stabilirea gradului de nedeterminare statică să se facă cu relația cunoscută

$$N = b + r - 2n. \quad (\text{X.2})$$

De exemplu, grinda cu zăbrele din figura X.1, d — la care intersecția diagonalelor nu reprezintă un nod — are $b = 11$, $r = 3$ și $n = 6$, deci $N = 2$.

Structura static determinată obținută prin îndepărtarea unui număr de legături simple egal cu gradul de nedeterminare statică, se numește *sistem de bază*. Sistemul de bază se poate obține în diferite moduri, așa cum se exemplifică și în figura X.2, b, c și d.

Sistemul de bază este static determinat și poate fi rezolvat pentru orice încărcare exterioară. Condiția generală care se impune sistemului de bază este ca acesta, încărcat cu forțele exterioare date și cu necunoscutele, reprezentând echivalentul mecanic al legăturilor îndepărtate, să se comporte identic cu structura reală. Aceasta înseamnă că deplasările totale pe direcțiile tuturor necunoscutelor să fie egale cu zero, $\Delta_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), deoarece în realitate pe aceste direcții există legături și nu se produc deplasări.

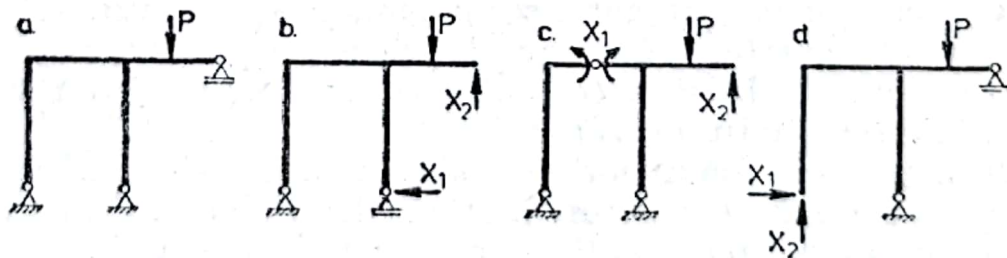


Fig. X.2

Matematic aceste condiții se exprimă prin sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{X.3})$$

Forma dezvoltată a condiției $\Delta_i = 0$ este

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{ii} X_i + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip} = 0 \quad (\text{X.4})$$

Expresia (X.4) reprezintă ecuația de condiție i , elementele sale componente avînd următoarea semnificație fizică:

— $X_1, X_2, \dots, X_n$ sînt forțele, de mărimi necunoscute, din legăturile suprimate. Necunoscuta X_i este numită necunoscută principală, iar celelalte, necunoscute secundare,

— δ_{ij} este deplasarea pe direcția necunoscutei X_i cînd sistemul de bază este încărcat numai cu necunoscuta $X_j = 1$,

— δ_{ii} este deplasarea pe direcția necunoscutei X_i cînd sistemul de bază este încărcat numai cu necunoscuta $X_i = 1$,

— Δ_{ip} este deplasarea pe direcția necunoscutei X_i cînd sistemul de bază este încărcat numai cu forțele exterioare date.

Deplasările δ_{ij} și δ_{jj} se numesc deplasări unitare (flexibilități), iar în ecuație sînt coeficienți ai necunoscutelor.

Pentru structurile în formă de cadre, la care efectul momentului încovoietor este dominant, coeficienții necunoscutelor și termenii liberi se calculează cu expresiile:

$$\delta_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx, \quad \delta_{ii} = \int \frac{m_i^2}{EI} dx, \quad \Delta_{ip} = \int \frac{m_i M_p}{EI} dx, \quad (\text{X.5})$$

unde m_i, m_j și M_p reprezintă eforturi obținute prin încărcarea succesivă a sistemului de bază numai cu $X_i = 1, X_j = 1$ și respectiv cu forțele exterioare date.

Din relația (X.5) rezultă că totdeauna coeficientul δ_{ii} , coeficientul necunoscutei principale, este diferit de zero și pozitiv, coeficientul δ_{ij} , coeficientul necunoscutei secundare, poate fi pozitiv, negativ sau egal cu zero, iar termenul liber Δ_{ip} poate fi pozitiv, negativ sau egal cu zero, cu condiția ca cel puțin un termen liber din sistemul de ecuații să fie diferit de zero.

Coeficienții necunoscutelor depind numai de sistemul de bază ales și de caracteristicile structurii static nedeterminate. Prin schimbarea încărcării trebuie reevaluați doar termenii liberi, deoarece numai ei depind de forțele exterioare date.

După alcătuirea și rezolvarea sistemului de ecuații se obțin valorile necunoscutele X_i . Cu aceste valori se pot determina apoi diagramele finale de eforturi, practic, folosind suprapunerea efectelor, cu ajutorul relației

$$M = M_p + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n. \quad (X.6)$$

Se calculează valorile momentelor încovoietoare în punctele caracteristice, care sînt capetele barelor. Se izolează apoi fiecare bară și, considerînd-o ca grindă simplu rezemată, se încarcă cu forțele exterioare date și cu momentele încovoietoare de la extremități și se construiesc diagramele T și M . Diagrama N se determină apoi cu ajutorul diagramei T , exprimînd echilibrul nodurilor structurii.

Dacă structura static nedeterminată este supusă acțiunii variației de temperatură sau prezintă cedări de reazeme, în sistemul de ecuații se schimbă numai termenii liberi, care se calculează cu expresiile:

— pentru variația de temperatură

$$\Delta_{ti} = \int \alpha n_i t_m dx + \int \alpha m_i \frac{\Delta t}{h} dx, \quad (X.7)$$

— pentru căderile de reazeme

$$\Delta_{i\Delta} = - \sum r_{ki} \Delta_k. \quad (X.8)$$

În aceste situații de încărcare momentele încovoietoare finale rezultă:

$$M_i = \sum m_i x_i, \quad M_{\Delta} = \sum m_i X_i, \quad (X.9)$$

respectiv prin însumarea efectelor nedeterminării statice, deoarece variația de temperatură și cedările de reazeme nu produc eforturi în sistemul de bază.

Pentru a avea certitudine asupra corectitudinii calculului efectuat este necesar ca acest calcul să fie verificat.

Se poate efectua verificarea coeficienților necunoscutele și termenilor liberi, precum și verificarea diagramei finale de moment încovoietor.

Pentru verificarea calculului coeficienților necunoscutele și termenilor liberi se procedează în modul următor:

— se încarcă sistemul de bază cu toate necunoscutele aplicate simultan, $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$, și se trasează o diagramă unitară, notată m_s ,

$$— \text{ se calculează } \delta_{ss} = \int \frac{m_s^2}{EI} dx \text{ și } \Delta_{sp} = \int \frac{m_s M_p}{EI} dx,$$

— dacă δ_{ss} este egal cu suma tuturor coeficienților necunoscuților, atunci aceștia au fost calculați corect,

$$\delta_{ss} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \quad (\text{X.10})$$

— dacă relația (X.10) nu este satisfăcută atunci se calculează termenii de forma

$$\delta_{is} = \int \frac{m_i m_s}{EI} dx \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{X.11})$$

și se compară cu suma coeficienților necunoscuților din ecuația corespunzătoare,

— dacă un singur termen δ_{is} nu respectă condiția $\delta_{is} = \sum_{i=1}^n \delta_{ij}$,

atunci coeficientul δ_{ii} a fost calculat greșit,

— dacă doi termeni δ_{ks} și δ_{hs} nu respectă condiția de mai înainte, atunci coeficientul δ_{kh} a fost calculat greșit,

— dacă $\Delta_{sp} = \sum_{i=1}^n \Delta_{ip}$, înseamnă că termenii liberi au fost calculați corect. Dacă nu, trebuie recalculați termenii liberi pentru a vedea care a fost determinat greșit inițial.

Diagrama finală de moment încovoietor trebuie să satisfacă concomitent condiția de echilibru static și condiția de continuitate a deformatelor și compatibilitatea ei cu reazemele.

Dacă diagramele m_i și M_p au fost trasate corect atunci diagrama finală M obținută cu expresia (X.6) respectă condiția de echilibru static pentru orice valori ale necunoscuților X_i . *Rezultă că verificarea eficientă în metoda forțelor este respectarea condiției de continuitate a deformatelor.* Această condiție se verifică utilizând calculul deplasărilor elastice la structuri static nedeterminate și anume, verificând dacă deplasarea pe direcția unei legături existente este egală cu zero.

Relația Maxwell — Mohr pentru calculul deplasării elastice este

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M}{EI} dx. \quad (\text{X.12})$$

Diagrama M este cunoscută.

Diagrama m_i este diagrama produsă pe sistemul static nedeterminat de o forță egală cu unitatea acționând pe direcția deplasării Δ_i . Efortul într-o secțiune carecure va fi

$$m_i = m_i^0 + m_1 X'_1 + m_2 X'_2 + \dots + m_n X'_n. \quad (\text{X.13})$$

Introducînd (X.13) în (X.12) și observînd că $X_1' \int \frac{m_1 M}{EI} = 0$,
 $X_2' \int \frac{m_2 M}{EI} dx = 0 \dots$, deoarece aceste expresii reprezintă deplasările
 pe direcțiile legăturilor reale înlocuite prin echivalentul lor mecanic
 $X_1, X_2, \dots, X_n$, deplasarea Δ_i primește forma

$$\Delta_i = \int \frac{m_i^0 M}{EI} dx. \quad (X.14)$$

Momentul încovoietor m_i^0 , din relația (X.14), este obținut pe
 orice sistem de bază, derivat din sistemul real și încărcat cu o forță
 egală cu unitatea acționînd pe direcția deplasării Δ_i .

Dacă structura static nedeterminată este supusă acțiunii variației
 de temperatură sau cedărilor de reazeme, deplasarea Δ_i se determină
 cu relația

$$\Delta_i = \Delta_i^0 + \Delta_{in}, \quad (X.15)$$

unde Δ_i^0 are expresia (X.7) sau (X.8), iar Δ_{in} este aportul nedeter-
 minării statice și se obține astfel:

— pentru variația de temperatură

$$\Delta_{in} = \int \frac{m_i^0 M_t}{EI} dx, \quad (X.16)$$

— pentru cedările de reazeme

$$\Delta_{in} = \int \frac{m_i^0 M_{\Delta}}{EI} dx. \quad (X.17)$$

În calculul practic al structurilor static nedeterminate, utilizînd
 metoda forțelor, se parcurg următoarele etape:

- se stabilește gradul de nedeterminare statică a structurii,
- se alege sistemul de bază,
- se trasează diagramele m_i și diagrama M_p , din încărcarea
 succesivă a sistemului de bază numai cu cîte o necunoscută $X_i = 1$
 și respectiv cu forțele exterioare date,
- se calculează coeficienții necunoscutelor, δ_{ii} , δ_{ij} și termenii
 liberi, Δ_{ip} și se verifică corectitudinea lor,
- se rezolvă sistemul de ecuații și se obțin necunoscutele X_i ,
- se determină diagrama finală de moment încovoietor,
- se verifică diagrama finală M ,
- se determină diagramele de forță tăietoare și de forță axială.

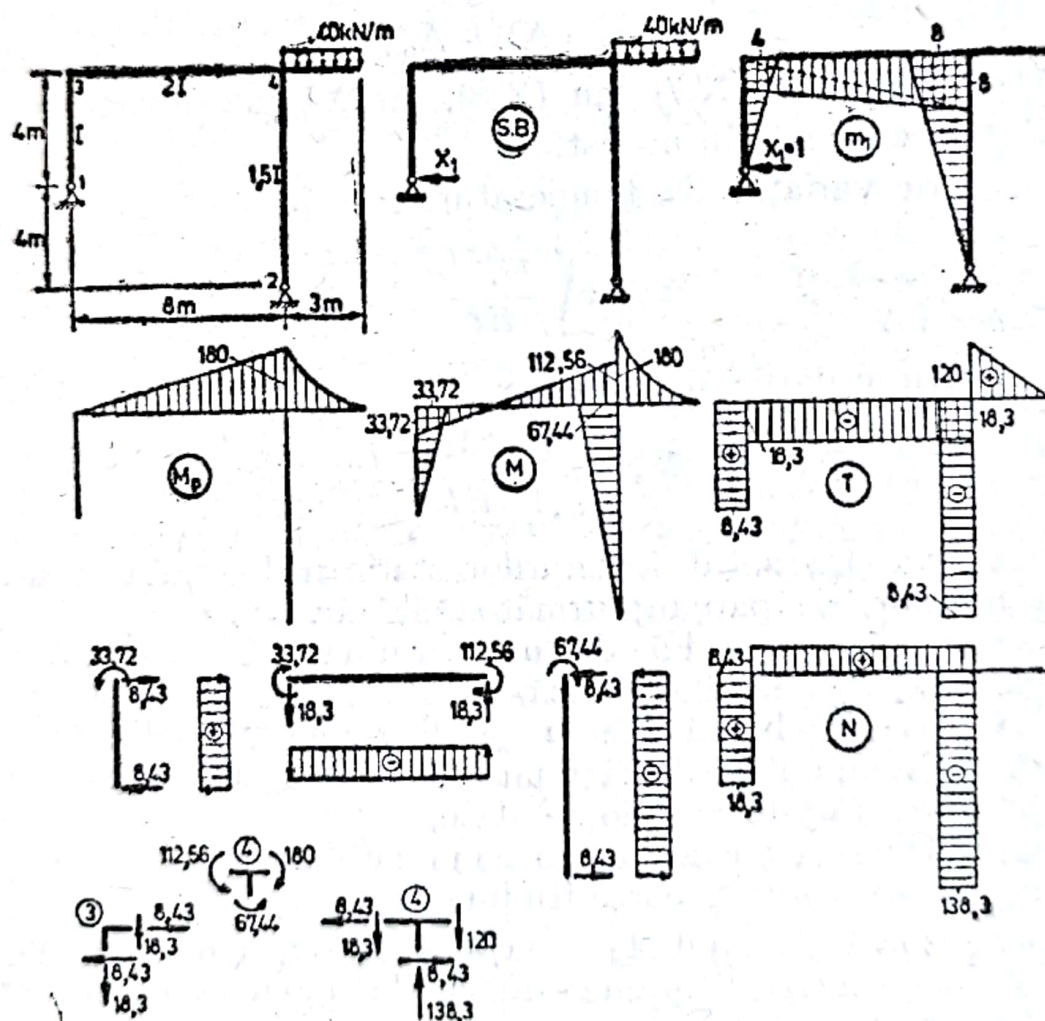
APLICAȚII

Problema 10.1. Să se traseze diagramele de moment încovoietor, de forță tăietoare și de forță axială, la structura din figura 10.1.

Structura este o dată static nedeterminată. Sistemul de bază a fost ales prin înlocuirea legăturii orizontale din secțiunea 1 cu echivalentul său mecanic, forța necunoscută X_1 . Sistemul de bază este static determinat. Din încărcarea cu forța $X_1 = 1$, se obține diagrama unitară m_1 , iar din încărcarea cu forțele date se obține diagrama M_p .

Sistemului de bază, încărcat cu necunoscuta X_1 și cu forțele date, i se impune condiția să se comporte identic cu structura reală, respectiv deplasarea totală pe direcția necunoscutei să fie egală cu zero,

$$\Delta_1 = 0 \text{ sau } \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$



Fi . 10.1

Coeficientul necunoscutei, δ_{11} și termenul liber, Δ_{1p} se calculează astfel:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} (4 \cdot 8 \cdot 6 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{20}{3}) + \frac{1}{1,5EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{2560}{9EI}, \\ \Delta_{1p} &= \int \frac{m_1 M_p}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 8 \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) = \\ &= -\frac{2400}{EI}.\end{aligned}$$

Cu aceste valori se obține

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = 8,43 \text{ kN}.$$

Calculul momentelor încovoietoare se face cu relația

$$M = M_p + m_1 X_1$$

$$M_{31} = 4 \cdot 8,43 = 33,72 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = 8 \cdot 8,43 - 180 = -112,56 \text{ kNm}$$

$$M_{42} = 8 \cdot 8,43 = 67,44 \text{ kNm}.$$

Momentul încovoietor pe consolă este cel din diagrama M_p , deoarece consola este un element static determinat.

Calculul forței tăietoare s-a făcut considerîndu-se barele separat, încărcate cu eforturile din secțiunile extreme și cu forțele date ce acționează asupra lor. În acest caz forțele acționează numai pe consolă, deci celelalte trei bare vor fi încărcate numai cu eforturile de la capete. Momentele încovoietoare fiind cunoscute, se determină forțele tăietoare din condiția de echilibru a fiecărei bare, iar forțele axiale se obțin din echilibrul nodurilor.

Problema 10.2. Să se traseze diagramele de moment încovoietor, de forță tăietoare și de forță axială, la structura din fig. 10.2.

Structura este de două ori static nedeterminată;

$$N = 3C - A - 2S = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

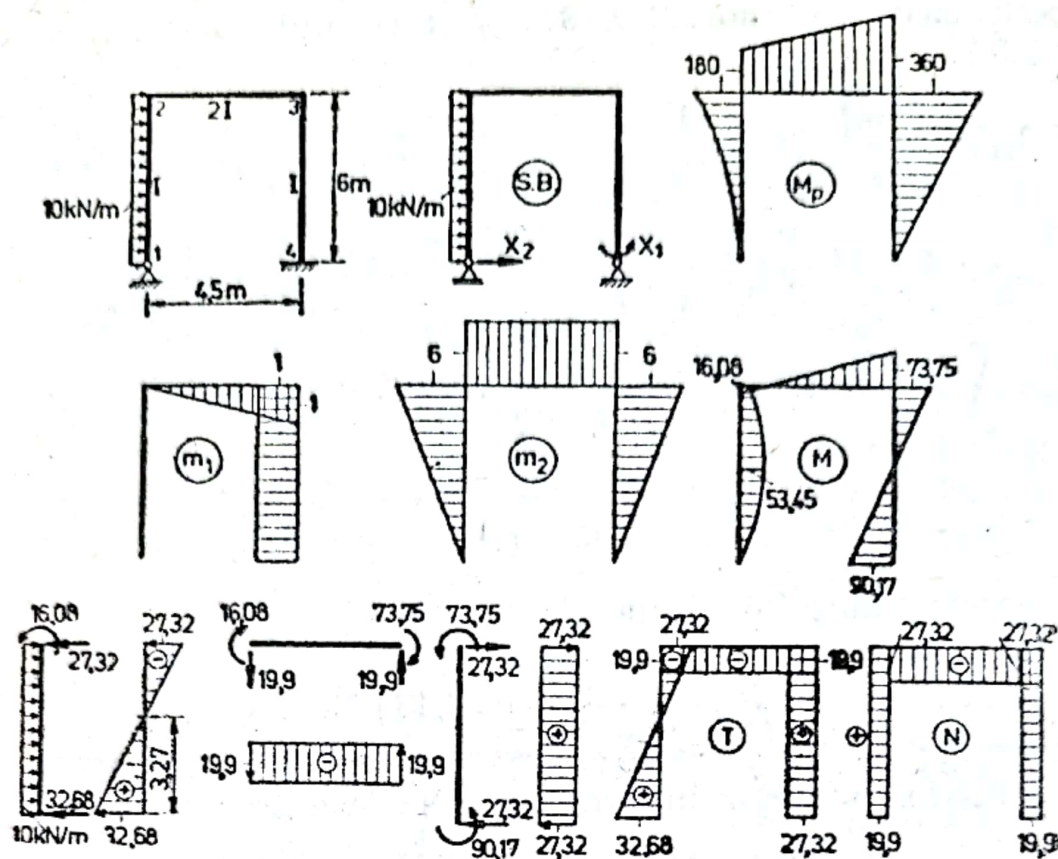


Fig. 10.2

Sistemul de bază, indicat în figura 9.13, s-a ales eliminând câte o legătură simplă din rezemări. Echivalentul mecanic al legăturilor eliminate este format din momentul încovoietor X_1 și forța X_2 .

Diagrama M_p și diagramele unitare m_1 și m_2 sînt prezentate direct în figură.

Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Coefficienții necunoscutelor și termenii liberi sînt:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{6,75}{EI},$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int \frac{m_2^2}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot 4,5 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{225}{EI}, \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 1 \cdot 6 =$$

$$= -\frac{24,75}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4,5 \left(\frac{1}{3} \cdot 800 + \frac{2}{3} \cdot 360 \right) -$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 6 \cdot 1 = -\frac{1417,5}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 4,5 \left(\frac{1}{2} \cdot 180 + \frac{1}{2} \cdot 360 \right) = \frac{9585}{EI}.$$

Sistemul de ecuații devine

$$\begin{cases} 6,75X_1 - 24,75X_2 = 1417,5 \\ 24,75X_1 + 225X_2 = -9585 \end{cases}$$

de unde rezultă $X_1 = 90,17 \text{ kNm}$ și $X_2 = -32,68 \text{ kN}$.

Momentul încovoietor se determină, pentru orice secțiune a structurii reale, cu relația $M = M_p + m_1 X_1 + m_2 X_2$.

$$M_{12} = M_{43} = 0$$

$$M_{21} = -180 + 0 - 6(-32,68) = 16,08 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = M_{21} = 16,08 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -360 + 1 \cdot 90,17 - 6(-32,68) = -73,75 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = M_{32}$$

$$M_{43} = 0 + 1 \cdot 90,17 = 90,17 \text{ kNm}.$$

Verificarea diagramei se efectuează determinînd, spre exemplu, rotirea θ în încăstrare. Pentru aceasta se calculează

$$\theta_4 = \int \frac{m_1 M}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 1 \left(\frac{1}{3} \cdot 16,08 - \frac{2}{3} \cdot 73,75 \right) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 6 \left(\frac{1}{2} \cdot 90,17 - \frac{1}{2} \cdot 73,75 \right) = \frac{0,022}{EI} = 0.$$

Deoarece produsul EI are valoare mare, se poate considera că $\theta_4 = 0$ și în consecință diagrama M este diagrama reală.

Observație. Se constată că în cazul încărcării structurii cu forțe, eforturile nu depind de natura materialului și nici de valorile absolute ale momentului de inerție, ci numai de rapoartele momentelor de inerție ale barelor.

Problema 10.3. Să se traseze diagramele de moment încovoietor, de forță tăietoare și de forță axială, la structura din figura 10.3. Structura este de 2 ori static nedeterminată; $N = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Sistemul de bază s-a ales eliminând câte o legătură din încastrări. Aceste legături au fost înlocuite cu echivalentele mecanice; două momente încovoietoare necunoscute X_1 și X_2 . S-au trasat apoi diagramele M_p , m_1 și m_2 .

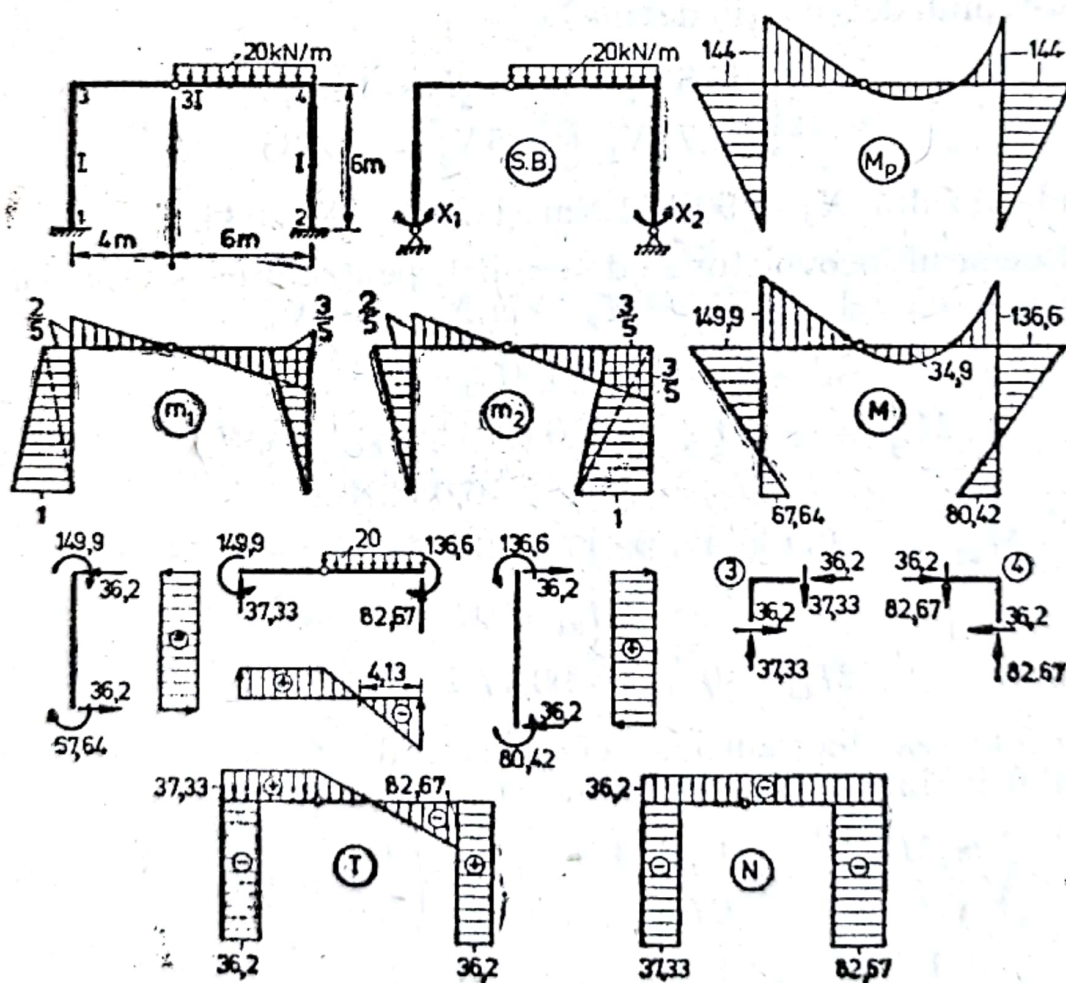


Fig. 10.3

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi ai sistemului de ecuații de condiție sînt:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \right] = \frac{4,13}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{15} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \right) \right] = \frac{4,63}{EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{2,35}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 144 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 144 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 144 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \right] = \frac{90,4}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 144 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot 4 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 144 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 144 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = - \frac{213,4}{EI}.$$

Sistemul de ecuații este :

$$\begin{cases} 4,13X_1 + 2,35X_2 + 90,4 = 0 \\ 2,35X_1 + 4,63X_2 - 213,4 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul de ecuații se obțin pentru necunoscute valorile

$$X_1 = -67,64 \text{ kNm} \text{ și } X_2 = 80,42 \text{ kNm}.$$

Momentele încovoietoare au fost determinate cu relația

$$M = M_p + m_1X_1 + m_2X_2.$$

și au valorile înscrise pe diagramă.

Pentru calculul forțelor tăietoare s-au considerat separat barele, iar valorile forțelor axiale au rezultat din echilibrul de nod.

Problema 10.4. Să se traseze diagrama de moment încovoietor a structurii din figura 10.4.

Gradul de nedeterminare statică este $N = 2$. S-a ales sistemul de bază din figură și s-au trasat diagramele m_1 , m_2 și M_p .

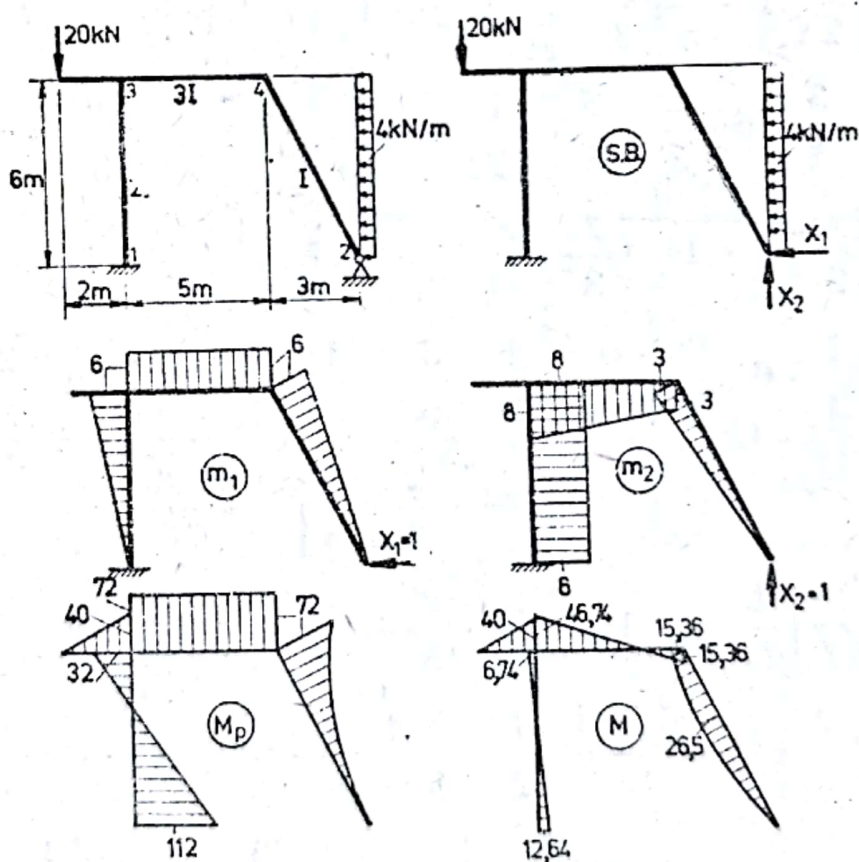


Fig. 10.4

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6,7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 = \frac{176,4}{EI},$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{2EI} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 5 \left(\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 3 \right) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = -\frac{167,2}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) \right] = \frac{265,8}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \left(\frac{2}{3} \cdot 32 - \frac{1}{3} \cdot 112 \right) + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 72 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6,7 \cdot 72 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{1587,6}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 8 \left(\frac{1}{2} \cdot 112 - \frac{1}{2} \cdot 32 \right) - \frac{1}{3EI} \cdot 72 \cdot 5 \left(\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 3 \right) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6,7 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{171,8}{EI}.$$

Sistemul de ecuații de condiție este :

$$\begin{cases} 176,4 X_1 - 167,2 X_2 + 1587,6 = 0 \\ -167,2 X_1 + 265,8 X_2 - 171,8 = 0. \end{cases}$$

Se obțin pentru necunoscute valorile $X_1 = -20,77 \text{ kN}$ și $X_2 = -12,42 \text{ kN}$.

Momentele încovoietoare finale sînt :

$$M_1 = 112 + 8(-12,42) = 12,64 \text{ kNm}$$

$$M_{31} = -32 - 6(-20,77) + 8(-12,42) = -6,74 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = -72 - 6(-20,77) + 8(-12,42) = -46,74 \text{ kNm}$$

$$M_{42} = -72 - 6(-20,77) + 3(-12,42) = 15,36 \text{ kNm}$$

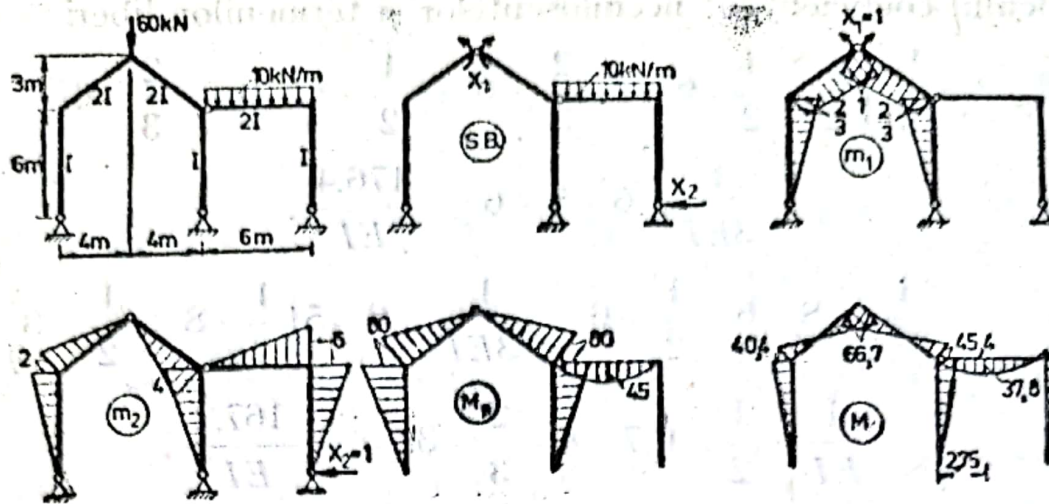


Fig. 10.5

Problema 10.5. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 10.5.

Structura este de două ori static nedeterminată; $3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2$. Sistemul de ecuații are forma generală:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2EI} \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{8}{9} \right) = \frac{143}{27EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} (4 - 2) + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \left(4 \cdot \frac{7}{5} - 2 \cdot \frac{7}{9} \right) = \frac{83}{18EI},$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = \\ &= \frac{494}{3EI}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 80 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 80 \cdot \frac{7}{9} =$$

$$= -\frac{3320}{9EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{90}{2} \cdot 3 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} (4 - 2) -$$

$$- \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} (4 - 2) = -\frac{550}{3EI}.$$

Sistemul de ecuații primește forma:

$$\begin{cases} 143X_1 + 124,5X_2 - 9960 = 0 \\ 83X_1 + 2964X_2 - 13020 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile: $X_1 = 67 \text{ kNm}$ și $X_2 = 2,51 \text{ kN}$.

Valorile momentelor încovoietoare finale sînt date în diagrama M .

Problema 10.6. Să se traseze diagramele de moment încovoiător și de forță tăietoare, la structura din figura 10.6.

Structura este static determinată exterior și de două ori static nedeterminată interior. Sistemul de bază s-a ales prin eliminarea legăturilor din articulația interioară.

Sistemul de bază fiind simetric, din încărcarea cu $X_1 = 1$ rezultă o diagramă antisimetrică, iar din încărcarea cu $X_2 = 1$ rezultă

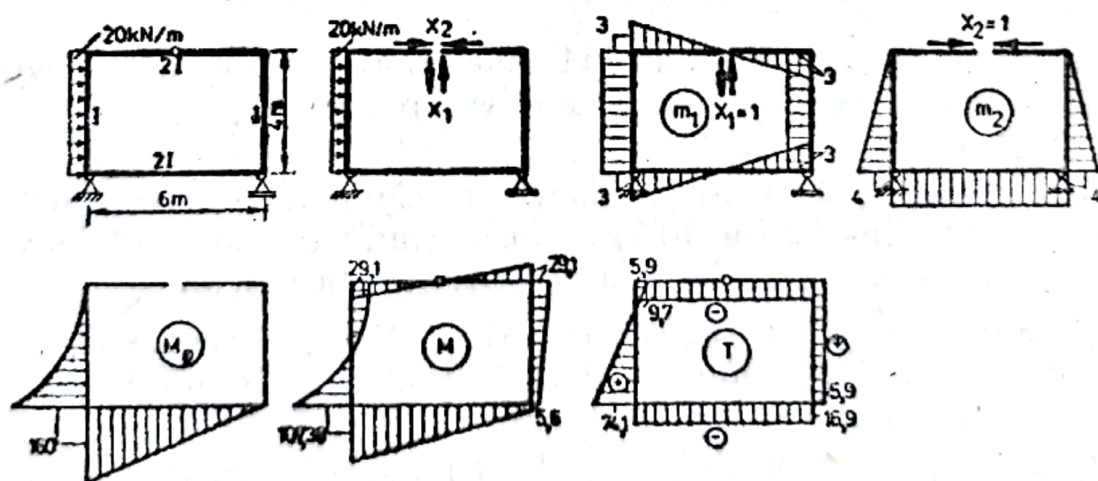


Fig. 10.6

o diagramă simetrică. Cum rezultatul integrării unei diagrame simetrice cu o diagramă antisimetrică este egal cu zero, rezultă

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0.$$

În fiecare ecuație rămîne o singură necunoscută, iar sistemul de ecuații este următorul:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{90}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{272}{3EI},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 160 \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 6 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) = \\ &= \frac{880}{EI}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 160 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 6 \cdot 4 = \frac{1600}{EI}.$$

Rezolvînd cele două ecuații se obține

$$X_1 = -9,7 \text{ kN și } X_2 = -5,88 \text{ kN.}$$

Cu aceste valori se determină diagrama de moment încovoietor și după aceea diagrama de forță tăietoare.

Problema 10.7. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 10.7, considerînd riglele indeformabile și să se calculeze deplasarea pe orizontală a riglelor.

Structura dată este de două ori static nedeterminată; $N = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. Sistemul de bază se alege eliminînd cele două legături suplimentare.

Deoarece riglele sînt articulate de stîlpi și neîncărcate transversal, în ele apar numai eforturi axiale.

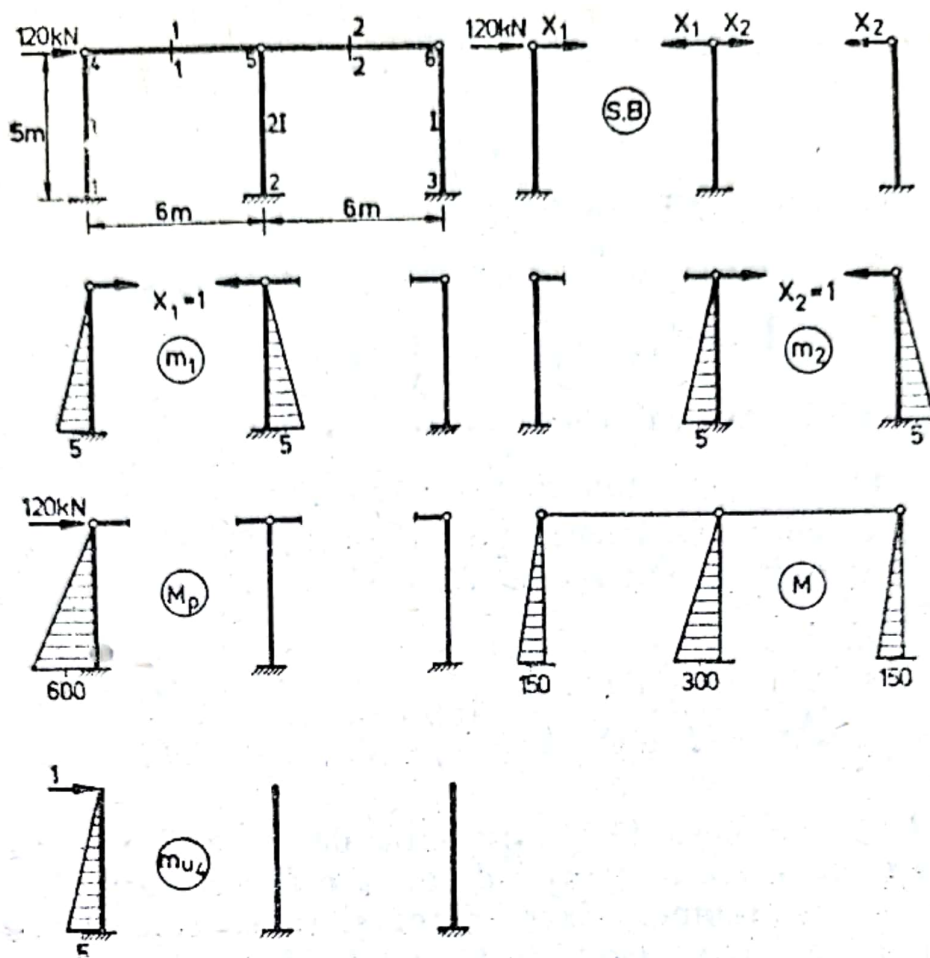


Fig. 10.7

Înterupând continuitatea structurii în secțiunile 1—1 și 2—2 de pe rigle și punând în evidență eforturile, acestea sînt reprezentate de perechile de forțe X_1 și X_2 . S-au suprimat deci două legături simple, care au fost înlocuite cu echivalentele lor mecanice.

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{62,5}{EI},$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = -\frac{20,83}{EI},$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{62,5}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{5000}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = 0.$$

Sistemul de ecuații are forma :

$$\begin{cases} 62,5 X_1 - 20,83 X_2 + 5000 = 0, \\ -20,83 X_1 + 62,5 X_2 = 0, \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile : $X_1 = -90$ kN și $X_2 = -30$ kN.

Diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figură.

Pentru calculul deplasării pe orizontală a riglelor se aplică o forță egală cu unitatea în secțiunea 4 și se integrează diagrama m_u cu diagrama M .

$$u_4 = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 150 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{1250}{EI}.$$

Problema 10.8. Se consideră structura de la aplicația precedentă, avînd momentele de inerție de două ori mai mari. Să se traseze diagrama de moment încovoietor și să se calculeze deplasarea pe orizontală a riglelor.

Sistemul de bază este același ca la aplicația precedentă, rezultînd aceleași diagrame m_1 , m_2 și M_p .

Coefficienții necunoscutelor și termenii liberi sînt :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \\ &= \frac{31,25}{EI}, \end{aligned}$$

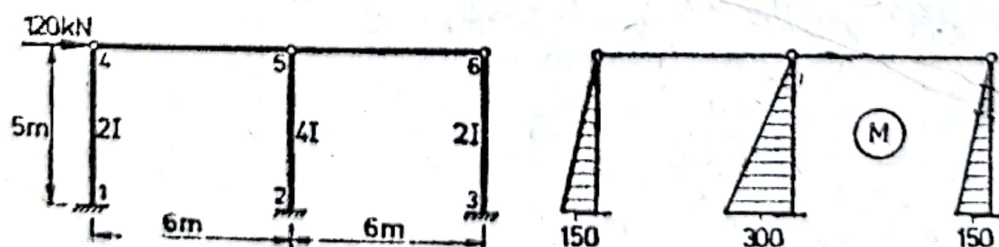


Fig. 10.8

$$\delta_{12} = -\frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = -\frac{10,415}{EI},$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{31,25}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2500}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = 0.$$

Sistemul de ecuații are forma:

$$\begin{cases} 31,25X_1 - 10,415X_2 + 2500 = 0, \\ -10,415X_1 + 31,25X_2 = 0, \end{cases}$$

rezultând necunoscutele $X_1 = -90$ kN și $X_2 = -30$ kN, aceleași ca la aplicația precedentă. În consecință și diagrama M este aceeași.

Pentru calculul deplasării u_4 se determină diagrama m_{u_4} , cu care apoi

$$u_4 = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 150 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{625}{EI}.$$

Observații. Din analiza diagramelor M (problemele 10.7 și 10.8) se constată că momentul încovoietor dat de forța orizontală, $M_H = 120 \cdot 5 = 600$ kNm, s-a distribuit celor trei stâlpi proporțional cu rigiditatea fiecăruia (stâlpii au aceeași lungime), conform relației

$$M_i = M_H \frac{I_i}{\sum I_i}.$$

$$M_1 = M_3 = 600 \cdot \frac{2I}{8I} = 150 \text{ kNm}, \quad M_2 = 600 \cdot \frac{4I}{8I} = 300 \text{ kNm}.$$

Diagrama M pentru structura din problema 10.8 este aceeași cu diagrama M pentru structura din problema 10.7, deci nu depinde de valorile momentelor de inerție, ci numai de rapoartele lor (în problema 10.8 se păstrează aceleași rapoarte ale momentelor de inerție).

Analizând deplasarea pe orizontală a riglelor se constată că pentru structura din problema 10.8, aceasta este jumătate din deplasarea pe orizontală a riglelor din problema 10.7. Structura din problema 10.8 are rigiditatea dublă față de cea din problema 10.7. Se mai spune că flexibilitatea structurii din problema 10.8 este jumătate față de aceea a structurii din problema 10.7.

Problema 10.9. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 10.9, supusă variației de temperatură indicată. Structura este din beton armat, avînd $E_b = 200\,000 \text{ daN/cm}^2$. Sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0. \end{cases}$$

Calculul momentelor de inerție:

$$I_{AB} = I_{CE} = I_{FG} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ dm}^4 = 0,0016 \text{ m}^4,$$

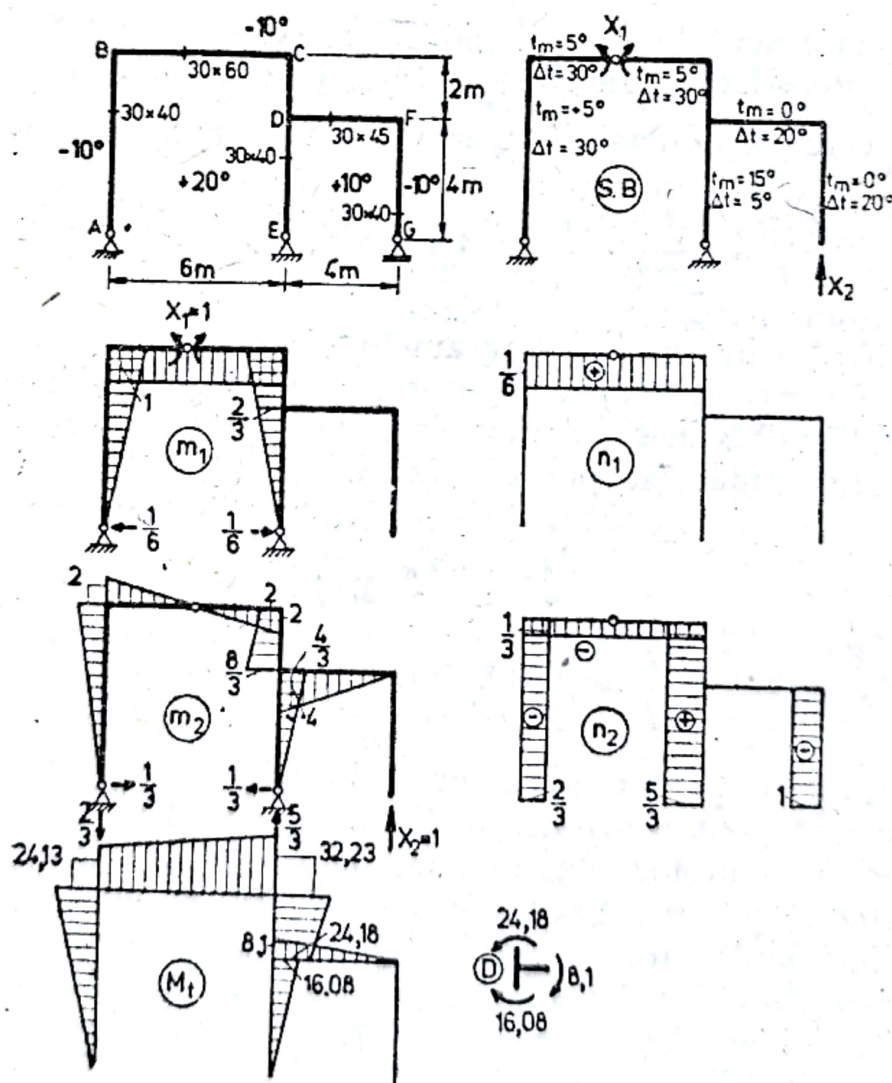


Fig. 10.9

$$I_{BC} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4 = 0,0054 \text{ m}^4,$$

$$I_{DF} = \frac{3 \cdot 4,5^3}{12} = 22,7 \text{ dm}^4 = 0,00227 \text{ m}^4.$$

Se alege $I_0 = 0,0016 \text{ m}^4 = I_{AB}$.

$$I_{BC} = \frac{54}{16} = 3,375 I_0,$$

$$I_{DF} = \frac{22,7}{16} = 1,42 I_0.$$

Coeficienții necunoscutelor se calculează în mod obișnuit, ei fiind independenți de natura încărcării.

$$\delta_{11} = \frac{1}{3,375 EI_0} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{2}{EI_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{5,76}{EI_0},$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EI_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EI_0} \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{9} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{3EI_0},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{22}{9} \right) + \frac{2}{3,375 EI_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \\ + \frac{1}{1,42 EI_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{116,16}{3EI_0}.$$

Termenii liberi se calculează cu relația

$$\Delta_{it} = \int n_i \alpha t_m dx + \int m_i \alpha \frac{\Delta t}{h} dx.$$

În cazul de față t_m , Δt și h sînt constante și se pot scoate de sub integrală așa încît $\int n_i dx$ și $\int m_i dx$ reprezintă suprafața diagramei de

forță axială, respectiv suprafața diagramei de moment încovoietor pe fiecare bară în parte.

Pentru $\alpha = 10^{-5}$ se obține:

$$\Delta_{1t} = -\alpha \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 + 2 \cdot \alpha \cdot \frac{30}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 + \alpha \cdot \frac{30}{0,6} \cdot 1 \cdot 6 = 745 \cdot 10^{-5},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2t} = & -\alpha \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \alpha \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 + \alpha \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{5}{3} + \alpha \cdot 15 \cdot 4 \cdot \frac{5}{3} - \\ & - \alpha \cdot \frac{30}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + \alpha \cdot \frac{30}{0,4} \cdot \frac{19}{8} - \alpha \cdot \frac{5}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3} + \\ & + \alpha \cdot \frac{20}{0,45} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{212}{3} \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Calculul produsului EI_0 :

$$E = 200\,000 \text{ daN/m}^2 = 2 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2,$$

$$EI_0 = 32\,000 \text{ kNm}^2.$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 17,28X_1 - 4X_2 + 745 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 32\,000 = 0, \\ -4X_1 + 116,16X_2 + \frac{212}{3} \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 32\,000 = 0 \end{cases}$$

sau după efectuarea calculelor:

$$\begin{cases} 17,28X_1 - 4X_2 + 715,2 = 0, \\ -4X_1 + 116,16X_2 + 67,84 = 0. \end{cases}$$

Valorile necunoscutele sînt:

$$X_1 = -28,18 \text{ kNm},$$

$$X_2 = -2,025 \text{ kN}.$$

Momentul încovoietor în orice secțiune se calculează cu relația

$$M_t = m_1X_1 + m_2X_2.$$

Problema 10.10. Să se determine diagrama de moment încovoietor la structura din figura 10.10, încărcată cu cedările de reazem $\theta_2 = 1^\circ$ și $v_2 = 2 \text{ cm}$. Se dă $EI = 48\,000 \text{ kNm}^2$.

Diagramele unitare și reacțiunile unitare sînt date în figura 10.10.

Coeficienții necunoscutelor sînt :

$$\delta_{11} = \frac{616,38}{EI}, \quad \delta_{12} = \frac{296,76}{EI}, \quad \delta_{22} = \frac{233,52}{EI}.$$

Termenii liberi se calculează astfel :

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum r_{ki} \Delta_k = -(9 \cdot \theta_2 + 1 \cdot v_2),$$

$$1^\circ = 0,0174 \text{ radiani},$$

$$\Delta_{1\Delta} = -9 \cdot 0,0174 - 1 \cdot 0,02 = -0,176,$$

$$\Delta_{2\Delta} = 0.$$

Sistemul de ecuații are forma :

$$\begin{cases} 616,38 X_1 + 296,76 X_2 - 0,176 \cdot 48\,000 = 0, \\ 296,76 X_1 + 233,52 X_2 = 0 \end{cases}$$

au :

$$\begin{cases} 616,38 X_1 + 296,76 X_2 - 8440 = 0, \\ 296,76 X_1 + 233,52 X_2 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile :

$$X_1 = 35,27 \text{ kN},$$

$$X_2 = -4,482 \text{ kN}.$$

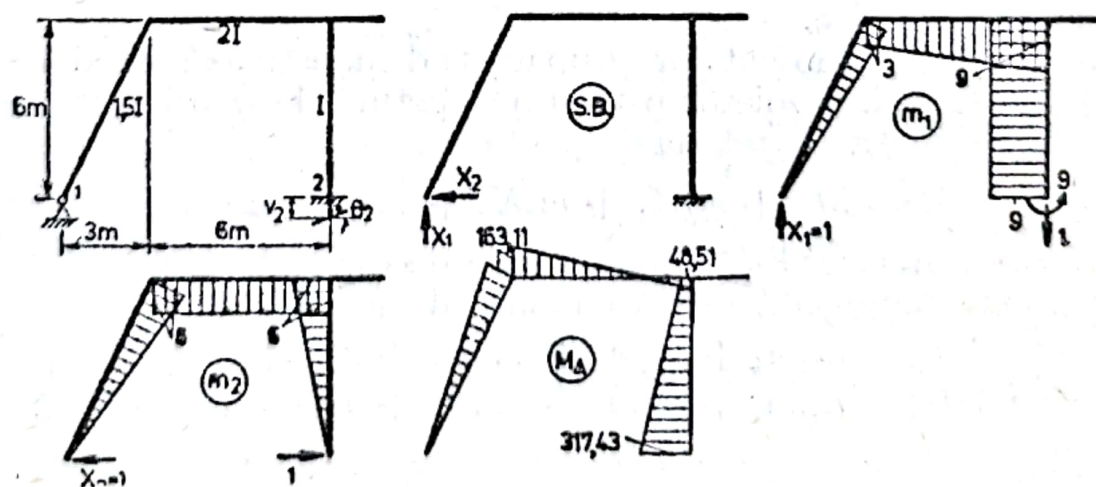


Fig. 10.10

Momentul încovoiător în secțiunea curentă a structurii reale se obține cu relația

$$M_{\Delta} = m_1 X_1 + m_2 X_2.$$

B. CALCULUL CADRELOR STATIC NEDETERMINATE, UTILIZÂND PROCEDEE PENTRU SIMPLIFICAREA ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE

Calculul structurilor prin metoda forțelor implică un volum mare de operații numerice, în special pentru determinarea coeficienților necunoscutelor, a termenilor liberi și pentru rezolvarea sistemului de ecuații de condiție, volum care crește rapid pe măsură ce gradul de nedeterminare statică a structurii se mărește. În vederea reducerii volumului de calcul au fost elaborate o serie de procedee pentru simplificarea ecuațiilor și a sistemelor de ecuații.

Evident că cel mai avantajos procedeu ar fi acela care ar conduce la ecuații cu o sigură necunoscută, însă acest lucru nu este posibil decât cu consumarea unui timp de multe ori mai mare decât cel necesar rezolvării directe. De aici se desprinde concluzia că procedeele de simplificare a ecuațiilor de condiție vor fi utilizate numai dacă conduc la o reducere efectivă a timpului și volumului de calcul.

În acest capitol se tratează :

- gruparea necunoscutelor,
- ortogonalizarea diagramelor unitare,
- utilizarea proprietăților de simetrie.

Aplicarea acestor procedee în rezolvarea structurilor se va prezenta pe acele cazuri la care sînt într-adevăr avantajoase.

a) Gruparea necunoscutelor.

Procedeul poate fi aplicat atît la structuri de formă oarecare cît și la structuri simetrice. Avantajoasă este utilizarea lui la rezolvarea structurilor simetrice.

În teoria necunoscutelor grupate se demonstrează că diagrama reală de moment încovoietor pentru o structură de n ori static nedeterminată obținută cu relația

$$M = M_p + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \dots + m_n X_n, \quad (\text{X.18})$$

se poate determina utilizând o altă serie de diagrame unitare $m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*$, care reprezintă grupări liniare de forma:

$$\begin{aligned} m_1^* &= a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + \dots + a_{1n}m_n \\ m_2^* &= a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + \dots + a_{2n}m_n \\ &\vdots \\ m_n^* &= a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 + \dots + a_{nn}m_n. \end{aligned} \quad (\text{X.19})$$

Condiția care se impune noilor diagrame m_i^* este ca ele să fie liniar independente. Această condiție este satisfăcută dacă determinantul coeficienților necunoscute, calculați cu noile diagrame, este diferit de zero, $D|a_{ij}| \neq 0$.

Diagrama finală de moment încovoietor fiind unică, ea nu depinde de calea adoptată pentru rezolvare și se determină cu relația obișnuită.

$$M = M_p + m_1^* X_1^* + m_2^* X_2^* + \dots + m_n^* X_n^*. \quad (X.20)$$

În această situație apare evident faptul că o diagramă oarecare poate fi obținută utilizând o grupare adecvată de necunoscute sau utilizând sisteme de bază diferite, rezultatul final rămânând nealterat.

De asemenea este de observat faptul că necunoscutele grupate X_i^* , ca de altfel și ecuațiile de condiție, își pierd semnificația fizică discutată anterior.

b) Ortogonalizarea diagramelor unitare.

Două diagrame unitare m_i și m_j se numesc ortogonale dacă satisfac condiția

$$\delta_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx = 0. \quad (X.21)$$

Exemplul tipic de diagrame ortogonale îl constituie diagramele simetrice și antisimetrice.

În cazul general procedeul ortogonalizării diagramelor unitare constă în aceea că, pornind de la o serie de diagrame $m_1, m_2, \dots, m_n$, se determină o altă serie de diagrame $m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*$ care să respecte în totalitate condiția (X.21).

Se consideră inițial o diagramă $m_1^* = m_1$ și apoi se determină succesiv celelalte diagrame astfel:

$$m_1^* = m_1, \quad (X.22)$$

$$m_2^* = \alpha_{21} m_1^* + m_2,$$

$$m_3^* = \alpha_{31} m_1^* + \alpha_{32} m_2^* + m_3 \text{ etc.,}$$

unde coeficienții α_{ji} au forma

$$\alpha_{ji} = - \frac{m_i^* m_j}{m_i^* m_i^*} = - \frac{\delta_{ij}}{\delta_{ii}}. \quad (X.23)$$

Procedând în acest mod cu toate diagramele, se obține sistemul de ecuații

$$\delta_{ii}^* X_i^* + \Delta_{ip}^* = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (X.24)$$

Volumul de calcul este însă mare.

Un mod specific de ortogonalizare a diagramelor unitare este transferul necunoscutelor în centrul elastic. Acest mod de ortogonalizare va fi prezentat la calculul arcelor static nedeterminate, unde se utilizează în mod curent.

c) Utilizarea proprietăților de simetrie.

Structurile static nedeterminate sînt simetrice în raport cu o axă, dacă geometria structurii și a secțiunii transversale precum și reazemele și legăturile interioare sînt simetrice în raport cu axa considerată. În plus, încărcarea exterioară poate fi simetrică sau antisimetrică. Dacă ea este oarecare, se poate descompune într-o încărcare simetrică și o încărcare antisimetrică, rezultatul final obținîndu-se prin suprapunerea efectelor.

Simplificări în calcul se obțin atît din utilizarea simetriei structurii cît și din utilizarea particularității încărcării exterioare.

Alegînd sistemul de bază simetric, în virtutea proprietății de ortogonalitate a diagramelor simetrice și antisimetrice, se obține o descompunere a sistemului de ecuații în două sisteme, unul conținînd numai necunoscutele simetrice, iar altul conținînd numai necunoscutele antisimetrice.

Astfel, pentru structura din figura X.3, considerînd sistemul de bază în cele două variante prezentate, rezultă că diagramele m_1 și m_2 sînt simetrice, iar diagrama m_3 este antisimetrică, deci sistemul general de trei ecuații, fiecare cu trei necunoscute, se transformă în următoarele două sisteme:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \quad (\text{X.25})$$

și

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \quad (\text{X.26})$$

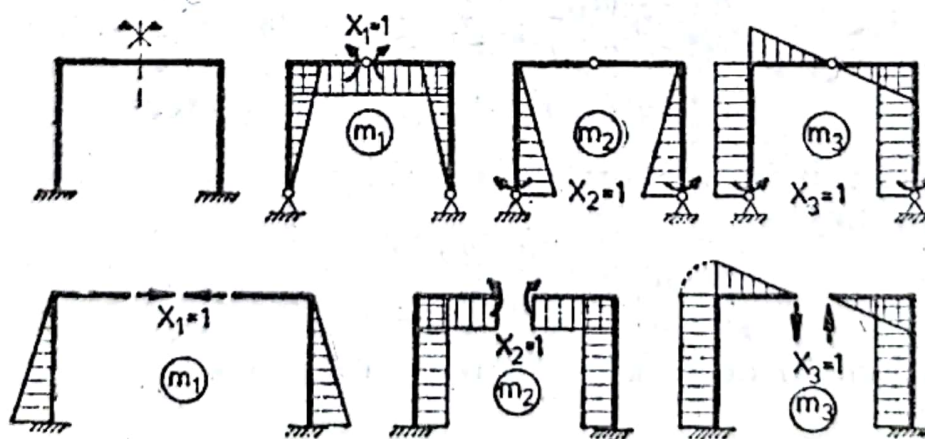


Fig. X.3

Dacă încărcarea exterioară este simetrică, atunci diagrama M_p este simetrică, rezultă $\Delta_{3p} = 0$, și se rezolvă numai sistemul (X.25).

Dacă încărcarea exterioară este antisimetrică, atunci diagrama M_p este antisimetrică, rezultă $\Delta_{1p} = \Delta_{2p} = 0$, și se rezolvă numai sistemul (X.26).

Se constată imediat că în metoda forțelor se obține o reducere substanțială a volumului de calcul pentru încărcarea antisimetrică.

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi se efectuează pe jumătate de structură.

Ținând de seama caracteristicile diagramelor de eforturi și a deformații structurii, în cazul încărcării simetrice sau a încărcării antisimetrice, se poate trece de la structura reală la o *semistructură* pe care să se conducă calculul. *Semistructura* este o structură convențională obținută din structura reală prin introducerea în axa de simetrie a unor legături care să înlocuiască efectul părții îndepărtate. În figura X.4 sînt prezentate semistructurile pentru cazul încărcării simetrice,

Structura	Semistructura	Condiții
		$H \neq 0 ; M \neq 0 ; V \neq 0$ $u = 0 ; \theta = 0 ; v \neq 0$
		$H \neq 0 ; M \neq 0 ; V \neq 0$ $u = 0 ; \theta = 0 ; v \neq 0$
		$H \neq 0 ; M \neq 0 ; V \neq 0$ $u = 0 ; \theta = 0 ; v = 0$

Fig. X.4

Structura	Semistruktura	Condiții
		$H=0, M=0; V \neq 0$ $u \neq 0; \theta \neq 0; v=0$
		$H=0, M=0; V \neq 0$ $u \neq 0; \theta \neq 0; v=0$

Fig. X.5

iar în figura X.5 sînt prezentate semistrukturile pentru cazul încărcării antisimetrice.

După trecerea de la structură la semistruktură, calculul se conduce obișnuit, parcurgînd etapele prezentate anterior.

Observație. Eforturile determinate pentru o jumătate de structură se transpun pe cealaltă jumătate simetric sau antisimetric, după tipul încărcării.

În cazul în care axa de simetrie întîlnește un stîlp, cazul al treilea în figurile X.4 și X.5, din încărcarea simetrică în stîlp apare numai forță axială. Din încărcarea antisimetrică, pe stîlpul central apare moment încovoietor, iar în diagrama pe structura reală momentul încovoietor din semistruktură se dublează.

APLICAȚII

Problema 10.11. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la structura simetrică din figura 10.11, utilizînd procedeul semistrukturilor.

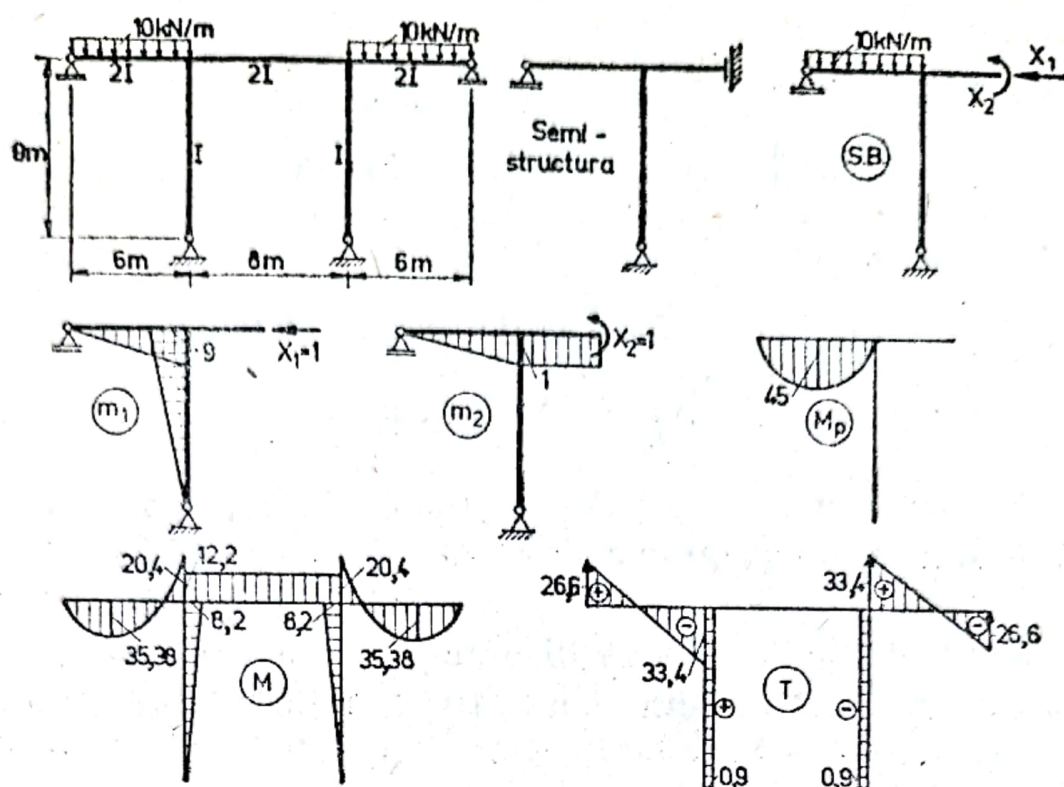


Fig. 10.11

Structura este simetrică și încărcată simetric. Trecerea la semi-structură se face introducând în axa de simetrie o încastrare glisantă. Sistemul astfel obținut este de două ori static nedeterminat. Sistemul de bază ales este arătat în figură.

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi sînt :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{324}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(1 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{3}{EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{9}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{810}{2EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{90}{2EI}.$$

Rezultă sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} 324 X_1 + 9X_2 + 405 = 0, \\ 9 X_1 + 3X_2 + 45 = 0, \end{cases}$$

care admite soluția :

$$X_1 = -0,91 \text{ kN},$$

$$X_2 = -12,2 \text{ kNm}.$$

Încărcarea fiind simetrică, diagrama de moment încovoietor rezultă simetrică, iar diagrama de forță tăietoare antisimetrică.

Problema 10.12. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura simetrică din figura 10.12, utilizând procedeul semi-structurilor.

Structura este simetrică și încărcată antisimetric. Semistructura se obține prin introducerea în axa de simetrie a unui reazem simplu.

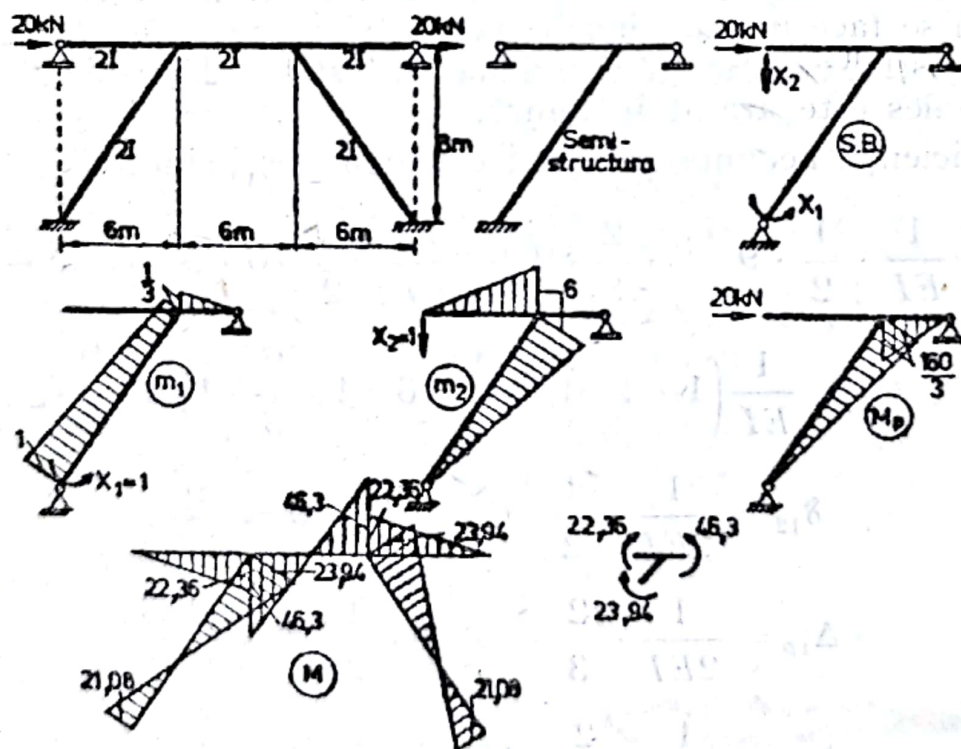


Fig. 10.12

Calculul coeficienților necunoscutelor și al termenilor liberi:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9} \right) = \frac{133}{54EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = \frac{96}{EI},$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{5}{9} = -\frac{25}{3EI},$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{160}{3} \cdot 10 \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{160}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{2240}{27EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{160}{3} = \frac{1600}{3EI}.$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 133X_1 - 450X_2 - 4480 = 0 \\ -450X_1 + 5184X_2 + 28800 = 0, \end{cases}$$

iar soluția:

$$X_1 = 21,08 \text{ kNm},$$

$$X_2 = -3,726 \text{ kN}.$$

Diagrama de moment încovoietor este antisimetrică.

Problema 10.13. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura simetrică din figura 10.13, utilizând procedeul semi-structurilor.

Și în acest caz se va studia numai combinația antisimetrică de încărcare. Combinația simetrică determină numai eforturi axiale, în rigle.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{64}{EI},$$

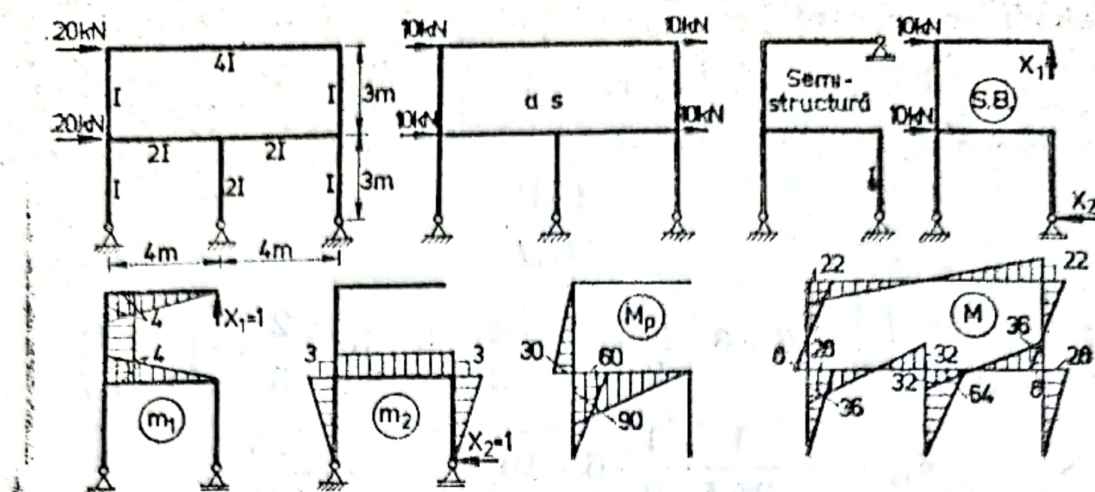


Fig. 10.13

$$\delta_{22} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{36}{EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{12}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 90 = \frac{480}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 60 - \frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 = -\frac{450}{EI}.$$

$$\begin{cases} 64X_1 + 12X_2 - 480 = 0, \\ 12X_1 + 36X_2 - 450 = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = 5,5 \text{ kN},$$

$$X_2 = 10,65 \text{ kN}.$$

Diagrama de moment încovoietor este antisimetrică.

Problema 10.14. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura simetrică din figura 10.14, utilizând procedeul semi-structurilor.

Semistructura este de două ori static nedeterminată,

$$N = 3 \cdot 2 - 2 - 2 - 1 = 2.$$

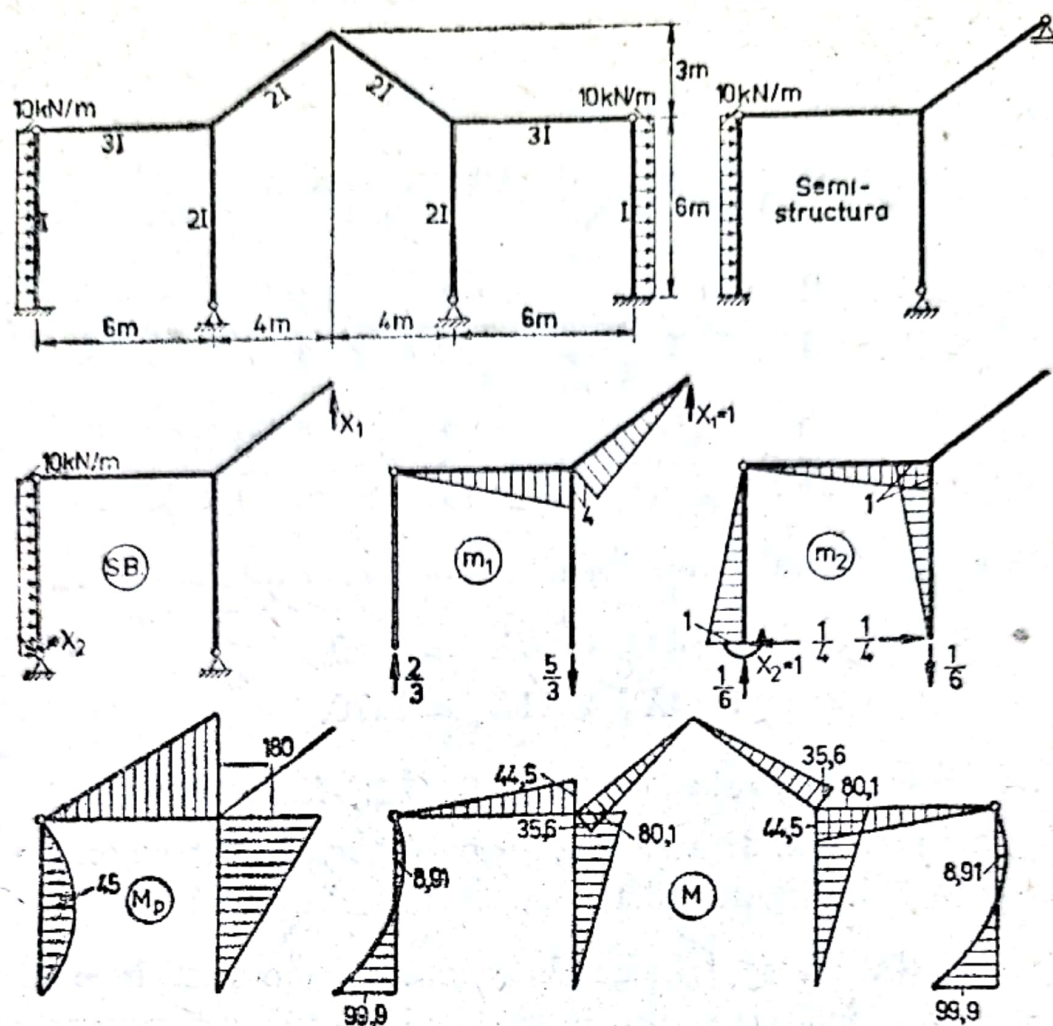


Fig. 10.14

Sistemul de bază ales și diagramele de momente încovoietoare m_1 , m_2 și M_p sînt prezentate direct în figură.

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi sînt :

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{24}{EI},$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{11}{3EI}, \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{3EI},$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = -\frac{480}{EI},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} = & -\frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 45 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \\ & - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{390}{EI}. \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații are forma :

$$\begin{cases} 72X_1 + 8X_2 = 1440, \\ 8X_1 + 11X_2 = 1170, \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile : $X_1 = 8,9 \text{ kN}$, $X_2 = 99,9 \text{ kNm}$.

Diagrama finală de moment încovoietor, pe întreaga structură, este prezentată în figura 10.14.

Problema 10.15. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura simetrică din figura 10.15, utilizând gruparea necunoscutelor.

Structura este simetrică și de trei ori static nedeterminată.

Sistemul de bază s-a ales simetric și cele trei necunoscute au fost grupate în perechi de necunoscute simetrice și antisimetrice.

Deoarece încărcarea dată este simetrică, necunoscutele din gruparea simetrică sînt diferite de zero și urmează a fi calculate.

Calculul coeficienților necunoscutelor și al termenilor liberi se efectuează pe jumătate de structură și rezultatul astfel obținut se multiplică cu 2.

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{48}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \right) = \frac{19}{3EI},$$

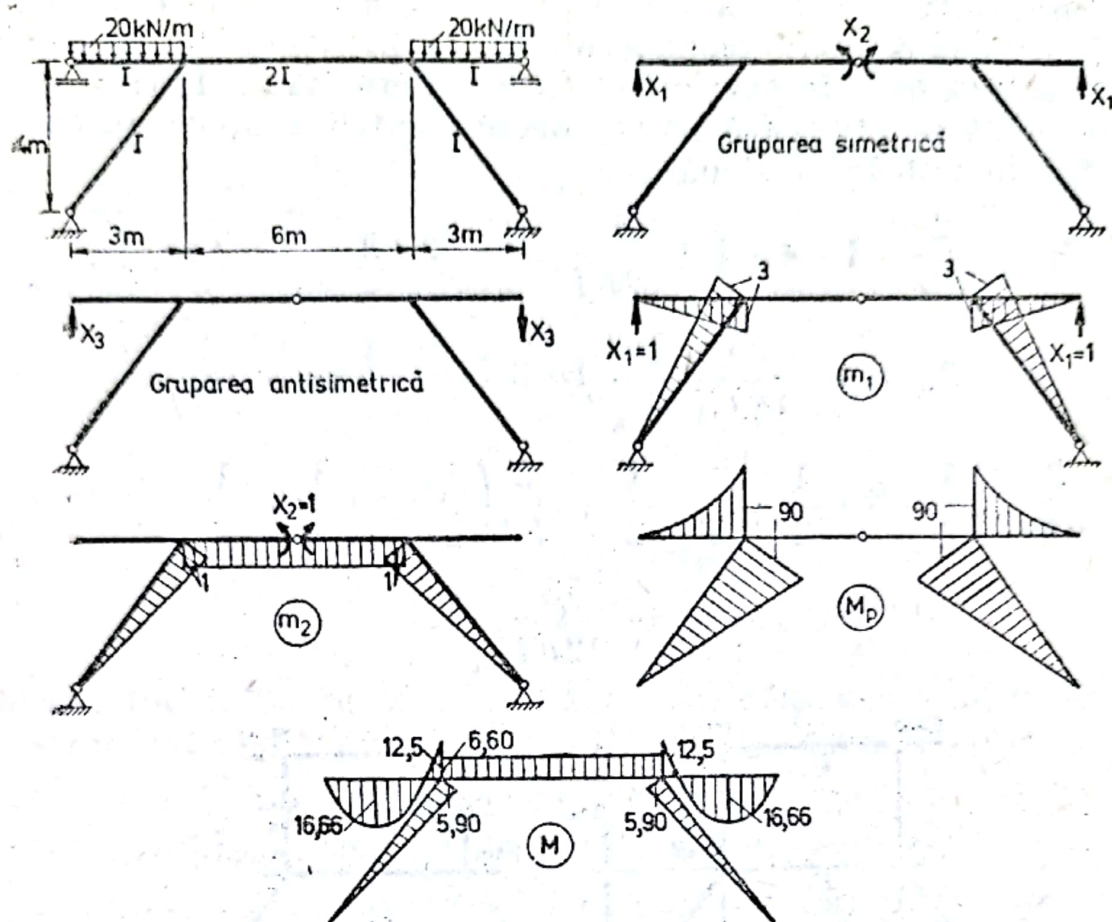


Fig. 10.15

$$\delta_{12} = -\frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{10}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{2}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 90 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 90 \right) = -\frac{1305}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{300}{EI}.$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 48X_1 - 10X_2 - 1305 = 0, \\ -10X_1 + 6,3X_2 + 300 = 0, \end{cases}$$

iar valorile necunoscutele rezultă: $X_1 = 25,8 \text{ kN}$, $X_2 = -6,57 \text{ kNm}$.

Cu aceste valori s-a trasat diagrama finală de moment încovoietor.

Problema 10.16. Să se traseze diagrama de moment încovoietor, prin procedeul grupării necunoscutelor, la structura din figura 10.16. Structura este de șase ori static nedeterminată. Încărcarea fiind antisimetrică se utilizează numai necunoscutele grupate antisimetric, care sînt în număr de două.

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{4}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{10}{EI},$$

$$\delta_{12} = -\frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{6} \right) = \frac{73}{12EI},$$

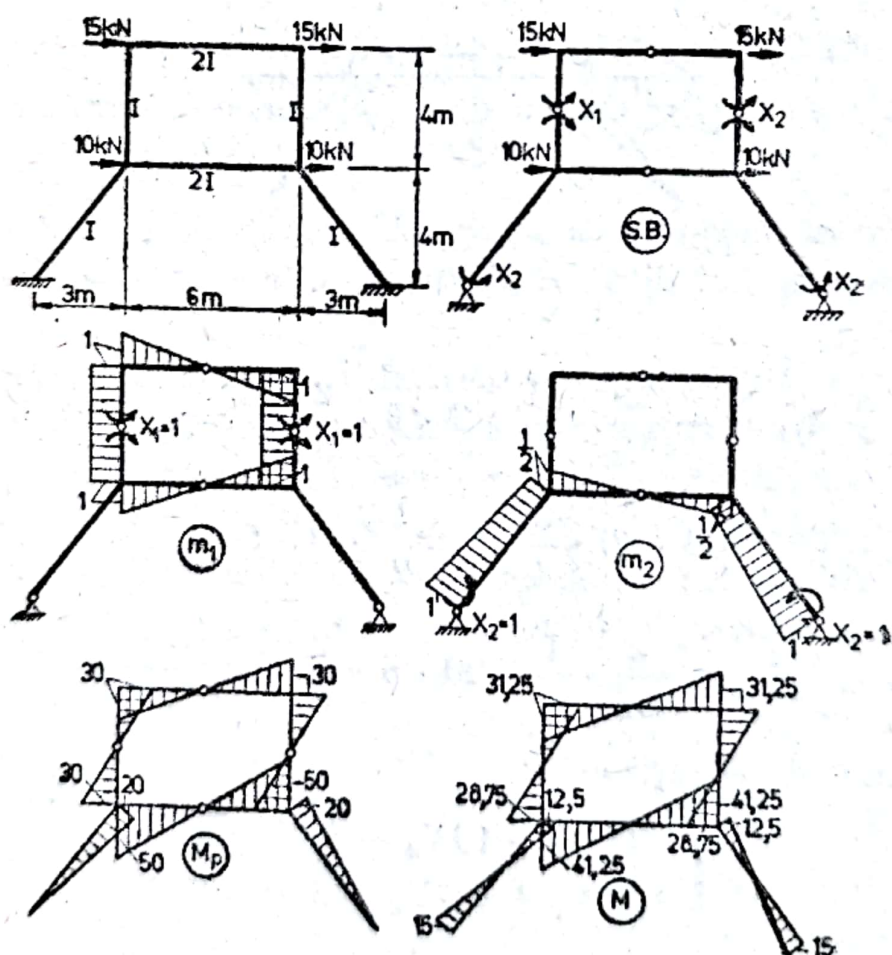


Fig. 10.16

$$\Delta_{1p} = \frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{20}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5 \cdot \frac{4}{6} = -\frac{550}{6EI}.$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 20X_1 - X_2 + 40 = 0, \\ -6X_1 + 73X_2 - 1100 = 0, \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile:

$$X_1 = 1,25 \text{ kNm},$$

$$X_2 = 15 \text{ kNm}.$$

Problema 10.17. Să se traseze diagrama de moment încovoietor, la structura simetrică din figura 10.17, în două variante:

- utilizând același sistem de bază,
- utilizând sisteme de bază diferite.

Structura este simetrică și încărcată cu forțe oarecare. Se va studia numai cazul încărcării antisimetrice. Încărcarea simetrică produce numai eforturi axiale în rigle. Semistructura are reazeme simple în dreptul axei de simetrie a structurii date.

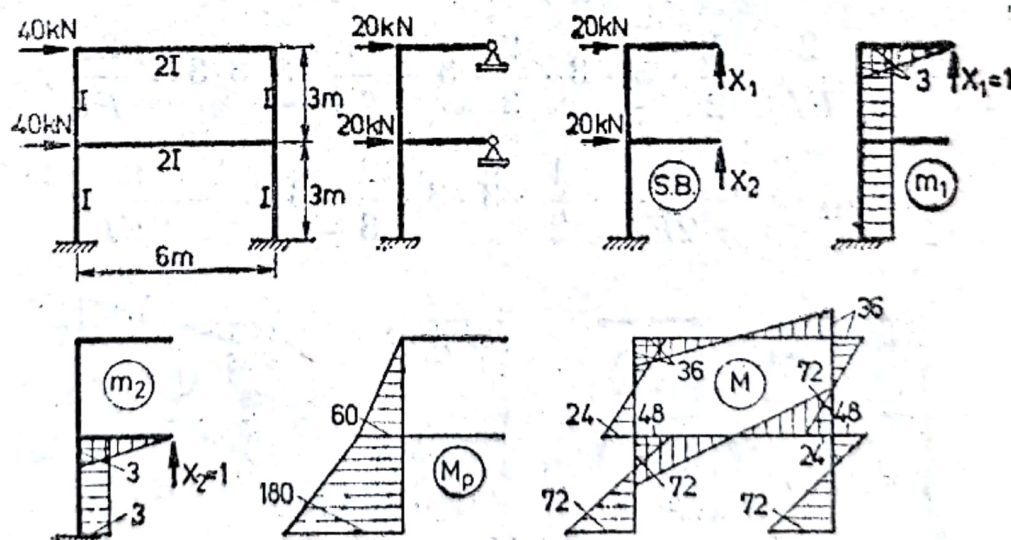


Fig. 10.17

a) În primul caz rezolvarea se va efectua pe un singur sistem de bază. Diagramele m_1 , m_2 și M_p sînt prezentate în figura 10.17.

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = \frac{117}{2EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{27}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{63}{2EI},$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \left(3 \cdot 3 \cdot \frac{60}{2} + 3 \cdot 3 \cdot 120 \right) = -\frac{2700}{2EI},$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 120 = -\frac{1080}{EI}.$$

Sistemul de ecuații are forma:

$$\begin{cases} 117X_1 + 54X_2 - 2700 = 0, \\ 54X_1 + 63X_2 - 2160 = 0, \end{cases}$$

de unde se obțin valorile necunoscutelor:

$$X_1 = 1,2 \text{ kN},$$

$$X_2 = 2,4 \text{ kN}.$$

b) În al doilea caz rezolvarea se va efectua pe mai multe sisteme de bază. Diagramele m_1 , m_2 și M_p sînt prezentate în figura 10.18.

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{36}{EI},$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = -\frac{9}{2EI},$$

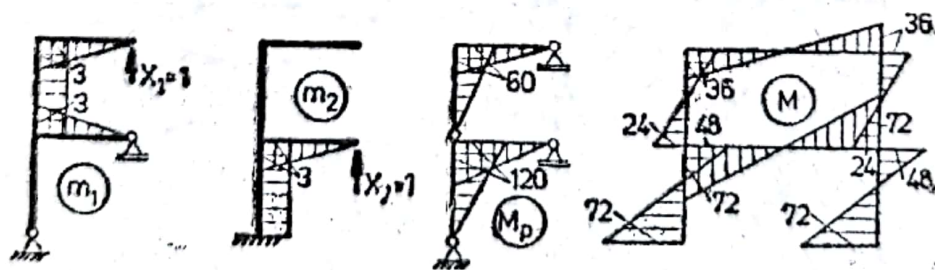


Fig. 10.18

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{63}{2EI},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot 3 -$$

$$- \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 120 = -\frac{180}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 120 \cdot 3 = \frac{720}{EI}.$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 36X_1 - 4,5X_2 + 180 = 0, \\ -9X_1 + 63X_2 + 1440 = 0, \end{cases}$$

iar necunoscutele au următoarele valori:

$$X_1 = -0,8 \text{ kN},$$

$$X_2 = -2,4 \text{ kN}.$$

Cu aceste valori se obține aceeași diagramă M ca și în prima variantă.

Problema 10.18. Să se traseze diagrama de moment încovoietor, la structura din figura 10.19, utilizând procedeul ortogonalizării diagramelor.

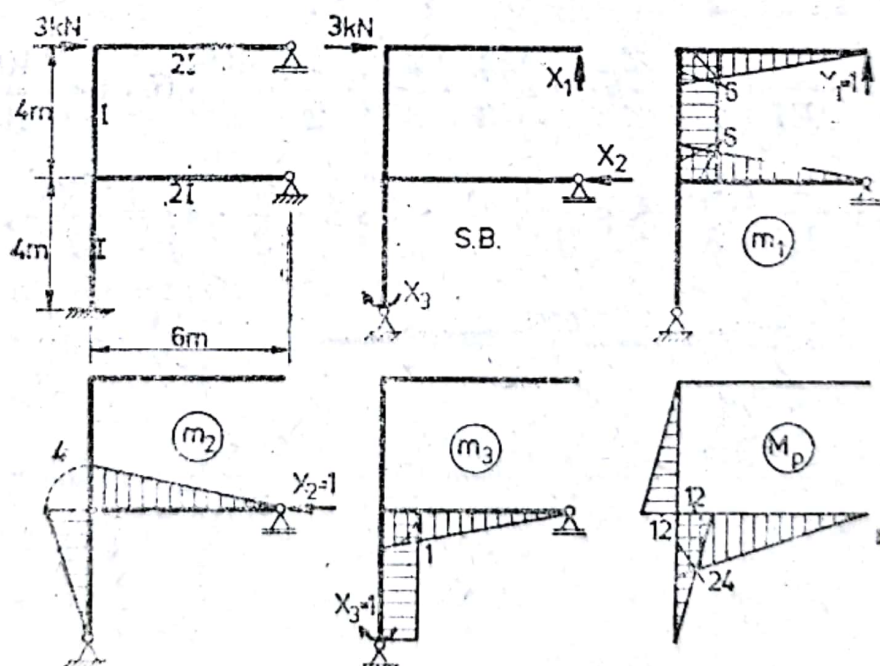


Fig. 10.19

Diagramele unitare inițiale m_1 , m_2 și diagrama M_p sînt date în figura 10.19.

Calculul diagramelor ortogonale:

$$m_1^* = m_1,$$

$$m_2^* = \alpha_{21} m_1^* + m_2,$$

$$m_3^* = \alpha_{31} m_1^* + \alpha_{32} m_2^* + m_3,$$

$$\alpha_{21} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}},$$

$$\delta_{11}^* = \frac{1}{2EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = \frac{216}{EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{24}{EI},$$

$$\alpha_{12} = -\frac{24}{216} = -\frac{1}{9},$$

$$m_2^* = -\frac{1}{9} m_1^* + m_2 \text{ (figura 10.20),}$$

$$\delta_{13} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{6}{EI},$$

$$\delta_{23} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3} - \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = -\frac{34}{3EI},$$

$$\begin{aligned} \delta_{22}^* &= \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3} \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{104}{3EI}, \end{aligned}$$

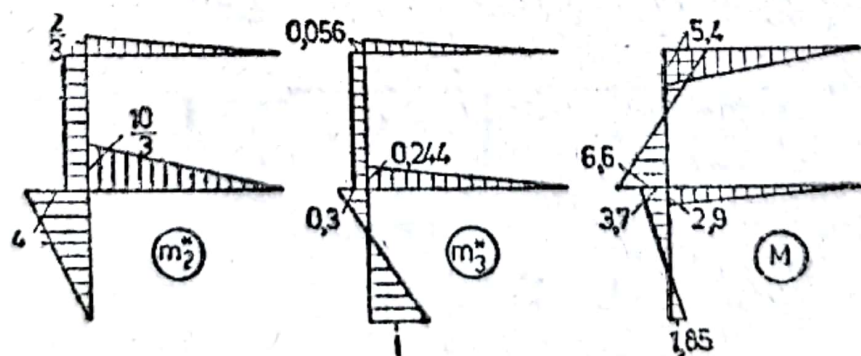


Fig. 10.20

$$\alpha_{31} = -\frac{-6}{216} = \frac{1}{36},$$

$$\alpha_{32} = -\frac{-34}{104} = 0,326,$$

$$m_3^* = \frac{m_1^*}{36} + 0,326m_2^* + m_3 \text{ (figura 10.20),}$$

$$\Delta_{1p}^* = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 24 \cdot 6 \right) = -\frac{288}{EI},$$

$$\Delta_{2p}^* = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} -$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = -\frac{128}{EI},$$

$$\delta_{33}^* = \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,056 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,056 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,244 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,244 \right) +$$

$$+\frac{1}{EI} \left(4 \cdot 0,056^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,3 - \right.$$

$$\left. -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{0,71}{EI},$$

$$\Delta_{3p}^* = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,244 + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot 0,056 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,3 \right) = -\frac{1,312}{EI}.$$

Sistemul de ecuații are forma:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* X_1 + \Delta_{1p}^* = 0, \\ \delta_{22}^* X_2 + \Delta_{2p}^* = 0, \\ \delta_{33}^* X_3 + \Delta_{3p}^* = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 216 X_1 - 288 = 0, \\ 104 X_2 - 314 = 0, \\ 0,71 X_3 - 1,312 = 0, \end{cases}$$

de unde se obțin valorile necunoscute:

$$X_1 = 1,335 \text{ kN}, \quad X_2 = 3,77 \text{ kN}, \quad X_3 = 1,85 \text{ kNm}.$$

Diagrama finală se prezintă în figura 10.20.

Capitolul XI

APLICAȚII SISTEMATIZATE ALE METODEI FORȚELOR

În acest capitol va fi studiat modul de aplicare a metodei forțelor la calculul următoarelor tipuri de structuri static nedeterminate:

- grinzi continue,
- grinzi cu zăbrele,
- arce.

A. GRINZI CONTINUE

Grinzile continue reprezintă o categorie de structuri de rezistență static nedeterminate cu o frecventă utilizare în practică. Calculul lor prin metoda forțelor se poate sistematiza, ca urmare a alegerii judicioase a sistemului de bază.

Se consideră o grindă continuă cu un număr oarecare de reazeme, din care a fost reținută numai o parte (fig. XI.1, a). Sistemul de bază se alege prin suprimarea legăturilor corespunzătoare momentelor încovoietoare de pe reazeme, obținându-se o succesiune de grinzi drepte (fig. XI.1, b).

Avantajul alegerii în acest mod a sistemului de bază constă în faptul că din încărcarea cu necunoscutele $X_j = 1$ diagramele unitare m_j se extind numai pe deschiderile adiacente reazemului j (fig. XI.

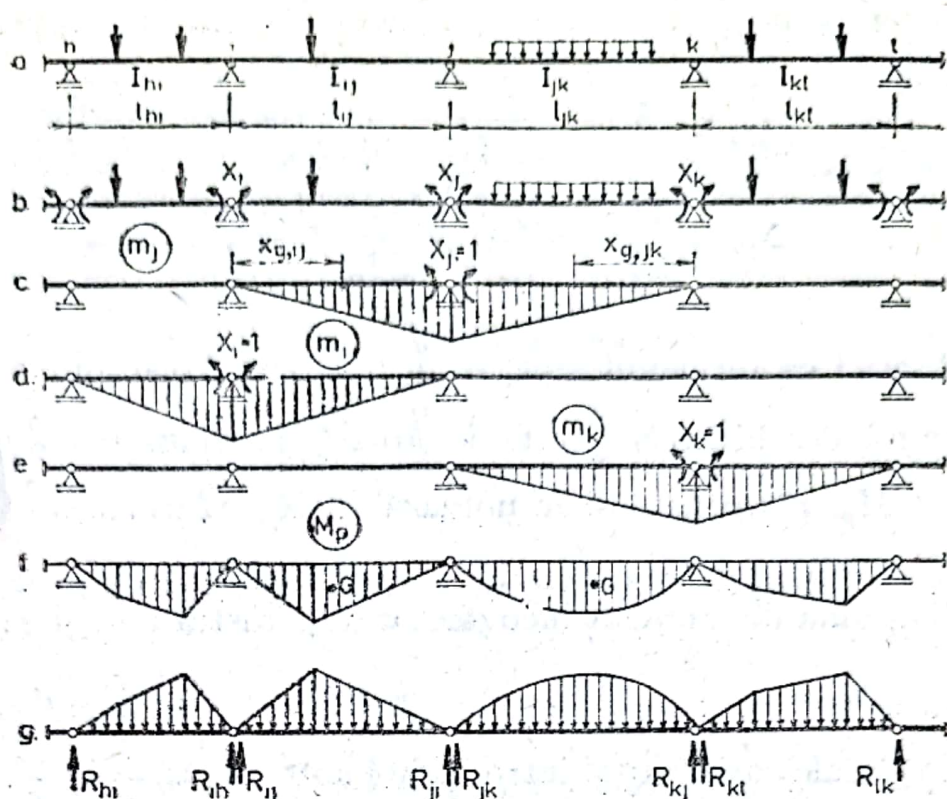


Fig. XI.1

1, c, d și e), iar din încărcarea cu forțele exterioare date efectul acestora se limitează numai la deschiderile asupra cărora acționează încărcările (fig. XI.1, f).

Ecuatia j exprimă în acest caz condiția ca rotirea relativă totală θ_j^{rel} din articulația introdusă în secțiunea j să fie egală cu zero și are forma

$$\delta_{j1} X_1 + \delta_{j2} X_2 + \dots + \delta_{ji} X_i + \delta_{jj} X_j + \delta_{jk} X_k + \dots + \Delta_{jp} = 0. \quad (XI.1)$$

Deoarece diagramele unitare se extind doar pe câte două panouri, rezultă că numai coeficienții δ_{ji} , δ_{jj} și δ_{jk} sînt diferiți de zero și în consecință ecuația de condiție (XI.1) primește forma redusă

$$\delta_{ji} X_i + \delta_{jj} X_j + \delta_{jk} X_k + \Delta_{jp} = 0. \quad (XI.2)$$

Ecuatia de condiție (XI.2) se numește *ecuația celor trei momente* deoarece conține trei necunoscute și acestea sînt momentele încovoietoare din trei secțiuni succesive.

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi au expresiile:

$$\delta_{ij} = \frac{l_{ij}}{6EI_{ij}}, \quad \delta_{jj} = \frac{l_{ij}}{3EI_{ij}} + \frac{l_{jk}}{3EI_{jk}}, \quad \delta_{jk} = \frac{l_{jk}}{6EI_{jk}} \quad (\text{XI.3})$$

$$\Delta_{jp} = \frac{\Omega_{ij}}{EI_{ij}} \cdot \frac{x_{g,ij}}{l_{ij}} + \frac{\Omega_{jk}}{EI_{jk}} \cdot \frac{x_{g,jk}}{l_{jk}}.$$

Se observă că termenul $\Omega_{ij} x_{g,ij} \frac{1}{l_{ij}}$ reprezintă reacțiunea din reazemul j , când deschiderea ij este încărcată cu diagrama de moment încovoietor M_p , răsturnată și se notează cu R_{ji} . Termenul $\Omega_{jk} x_{g,jk} \frac{1}{l_{jk}}$ reprezintă reacțiunea din reazemul j , când deschiderea jk este încărcată cu diagrama de moment încovoietor M_p , răsturnată și se notează cu R_{jk} .

Multiplicînd ecuația cu $6EI_0$, unde I_0 este un moment de inerție de comparație ales arbitrar și introducînd notațiile $\lambda_{ij} = l_{ij} \frac{I_0}{I_{ij}}$ și $\lambda_{jk} = l_{jk} \frac{I_0}{I_{jk}}$, ecuația celor trei momente primește forma utilizată curent

$$\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -6R_{ji} \frac{I_0}{I_{ij}} - 6R_{jk} \frac{I_0}{I_{jk}} \quad (\text{XI.4})$$

sau

$$\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -\lambda_{ij} m_{ji} - \lambda_{jk} m_{jk}, \quad (\text{XI.5})$$

unde m_{ji} și m_{jk} sînt caracteristicile de încărcare definite în cadrul capitolului VIII.

Mărimile λ_{ij} și λ_{jk} se numesc *lungimi transformate* ale deschiderilor ij respectiv jk și caracterizează complet barele respective.

Pentru fiecare secțiune în care s-a întrerupt continuitatea se scrie cîte o ecuație de forma (XI.4) obținîndu-se astfel sistemul ecuațiilor de condiție. Rezolvînd acest sistem rezultă direct valorile momentelor încovoietoare din secțiunile de pe reazeme, deoarece aici $M_p = 0$ și $X_j = 1$. În cîmp, diagrama de moment încovoietor se obține cu relația cunoscută, $M = M_p + \Sigma X_j m_j$.

Prima parte a ecuației celor trei momente se poate scrie independent de încărcarea exterioară deoarece depinde doar de caracteristicile grinzii.

Dacă încărcarea grinzii este variație de temperatură sau cedare de reazeme atunci se modifică numai termenii liberi. Forma termenilor liberi este următoarea:

— *Încărcarea cu variație de temperatură.* Din încărcarea sistemului de bază cu necunoscutele X_j , forța axială este egală cu zero și deci termenul liber are forma

$$\Delta_{ji} = \int \alpha m_j \frac{\Delta t}{h} dx. \quad (\text{XI.6})$$

Pentru grinzile cu secțiune constantă pe fiecare deschidere, termenul liber al ecuației devine

$$\Delta_{ji} = \alpha \left(\frac{1}{2} \Delta t_{ij} \frac{l_{ij}}{h_{ij}} + \frac{1}{2} \Delta t_{jk} \frac{l_{jk}}{h_{jk}} \right), \quad (\text{XI.7})$$

iar ecuația celor trei momente se scrie

$$\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -3EI_0 \alpha \left(\Delta t_{ij} \frac{l_{ij}}{h_{ij}} + \Delta t_{jk} \frac{l_{jk}}{h_{jk}} \right) \quad (\text{XI.8})$$

— *Încărcarea cu cedări de reazeme.* Din încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta $X_j = 1$, în reazemele i , j și k apar reacțiunile $\frac{1}{l_{ij}}$ și $\frac{1}{l_{jk}}$ astfel încât termenul liber devine

$$\Delta_{j\Delta} = -\sum r_{sj} \Delta_s = \frac{\Delta_j - \Delta_i}{l_{ij}} + \frac{\Delta_j - \Delta_k}{l_{jk}}, \quad (\text{XI.9})$$

unde r_{sj} reprezintă reacțiunea în reazemul simplu curent, iar Δ_s deplasarea reazemului.

În acest caz de încărcare, ecuația celor trei momente are forma

$$\lambda_{ij} X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk}) X_j + \lambda_{jk} X_k = -6EI_0 \left(\frac{\Delta_j - \Delta_i}{l_{ij}} + \frac{\Delta_j - \Delta_k}{l_{jk}} \right). \quad (\text{XI.10})$$

Observații. Prima și ultima ecuație a sistemului conțin numai câte două necunoscute.

Dacă un capăt al grinzii continue este încastrat, se utilizează un artificiu și anume, se introduce o deschidere fictivă a cărei lun-

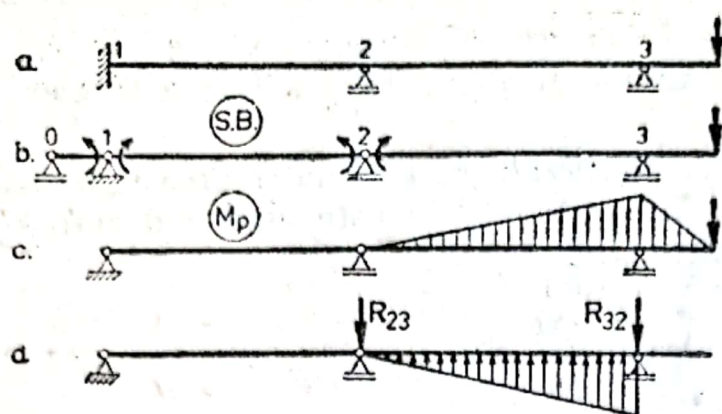


Fig. XI.2

gime transformată să fie egală cu zero (fig. XI.2, b). Această condiție se obține considerînd deschiderea fictivă infinit rigidă, $I = \infty$.

Dacă grinda continuă are o consolă atunci în calculul termenului liber se consideră numai efectul consolei asupra grinzii, respectiv diagrama M_p cuprinsă între cele două reazeme din vecinătatea consolei (fig. XI.2, d).

Reacțiunile fictive R_{ji} și R_{jk} se introduc în ecuație cu semnul plus dacă au sensul de jos în sus și cu semnul minus dacă au sensul de sus în jos.

În cazul grinzilor cu secțiune variabilă ecuația celor trei momente este

$$\lambda_{ij}c_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij}c_{ij}'' + \lambda_{ik}c_{jk}')X_j + \lambda_{jk}c_{jk}X_k = -\lambda_{ij}s_{ij}''m_{ji} - \lambda_{jk}s_{jk}'m_{jk} = 0. \quad (\text{XI.11})$$

În Anexa 2 se dau direct produsele $s''m$ și $s'm$ funcție de tipul încărcării și al variației secțiunii grinzii.

Procedeu punctelor fixe. Momentele încovoietoare la grinzile continue se pot determina pornind de la observația că pe deschiderile neîncărcate diagrama de moment încovoietor este liniară, cu punct de anulare a cărui poziție este fixă (de unde și numele procedeuului). Deoarece necunoscutele X_j reprezintă momentele încovoietoare din secțiunile de pe reazeme ele se vor nota cu litera M , pentru o reprezentare mai sugestivă.

Presupunînd că toate deschiderile de la stînga reazemului j sînt neîncărcate, ecuația de condiție pentru reazemul i este

$$\lambda_{hi}M_h + 2(\lambda_{hi} + \lambda_{ij})M_i + \lambda_{ij}M_j = 0, \quad (\text{XI.12})$$

de unde se poate obține raportul M_j/M_i

$$-\frac{M_j}{M_i} = 2 + \frac{\lambda_{hi}}{\lambda_{ij}} \left(2 + \frac{M_h}{M_i} \right). \quad (\text{XI.13})$$

Introducînd notațiile

$$r_j = -\frac{M_j}{M_i}, \quad r_i = -\frac{M_i}{M_h},$$

relația (XI.13) devine

$$r_j = 2 + \frac{\lambda_{hi}}{\lambda_{ij}} \left(2 - \frac{1}{r_i} \right). \quad (\text{XI.14})$$

Cu relația de recurență (XI.14), între rapoartele momentelor încovoietoare de la extremitățile a două deschideri adiacente se pot determina aceste rapoarte pentru toate deschiderile, numai în funcție de elementele geometrice ale grinzii continue.

Dacă grinda continuă are capătul din stînga articulat ($M_0 = 0$), se obțin următoarele expresii ale rapoartelor r_j :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{M_1}{M_0} = \infty, \\ r_2 &= -\frac{M_2}{M_1} = 2 + 2 \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}}, \\ r_3 &= -\frac{M_3}{M_2} = 2 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} \left(2 - \frac{1}{r_2} \right), \\ &\vdots \\ r_j &= -\frac{M_j}{M_i} = 2 + \frac{\lambda_{hi}}{\lambda_{ij}} \left(2 - \frac{1}{r_i} \right). \end{aligned} \quad (\text{XI.15})$$

Dacă grinda continuă are capătul din stînga încastrat perfect ($M_0 \neq 0$), se obțin următoarele expresii ale rapoartelor r_j :

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{M_1}{M_0} = 2^*), \\ r_2 &= -\frac{M_2}{M_1} = 2 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{12}} \left(2 - \frac{1}{2} \right), \\ r_3 &= -\frac{M_3}{M_2} = 2 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} \left(2 - \frac{1}{r_2} \right) \text{ etc.} \end{aligned} \quad (\text{XI.16})$$

Asemănător se scriu și rapoartele momentelor încovoietoare de pe reazemele aflate la dreapta deschiderii încărcate. Dacă deschiderea jk este încărcată, iar deschiderile următoare kl , lm etc. sînt

* Ecuația celor trei momente pentru capătul încastrat este $2\lambda_{10}M_0 + \lambda_{01}M_1 = 0$, de unde rezultă $-\frac{M_1}{M_0} = 2$.

neîncărcate, raportul M_k/M_l se obține din condiția $\theta_l^{rel} = 0$ și are expresia

$$r_k = -\frac{M_k}{M_l} = 2 + \frac{\lambda_{lm}}{\lambda_{kl}} \left(2 - \frac{1}{r_l'} \right). \quad (\text{XI.17})$$

Momentele încovoietoare M_j și M_k se determină din ecuațiile de continuitate scrise pentru secțiunile j și k , care sînt:

$$\lambda_{lj}M_l + 2(\lambda_{lj} + \lambda_{jk})M_j + \lambda_{jk}M_k = -\lambda_{jk}m_{jk},$$

$$\lambda_{jk}M_j + 2(\lambda_{jk} + \lambda_{kl})M_k + \lambda_{kl}M_l = -\lambda_{kl}m_{kl}.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații și ținînd seama de notațiile anterioare rezultă:

$$M_j = -\frac{r_k' m_{jk} - m_{kj}}{r_j r_k' - 1}, \quad M_k = -\frac{r_j m_{kj} - m_{jk}}{r_j r_k' - 1}. \quad (\text{XI.18})$$

APLICAȚII

Problema 11.1. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.1.

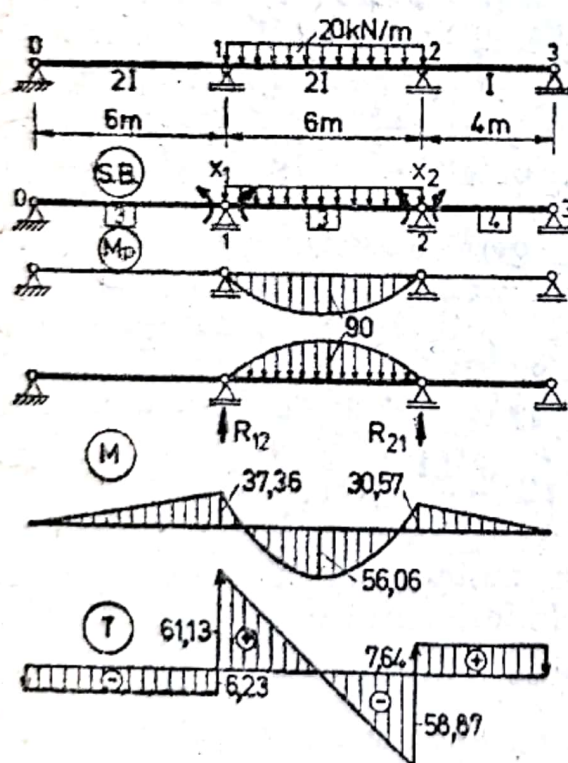


Fig. 11.1

Grinda continuă este de două ori static nedeterminată. Sistemul de bază încărcat cu forțele date și cu cele două necunoscute, precum și diagrama M_p au fost reprezentate în figură.

Pentru calculul lungimilor transformate ale deschiderilor se alege $I_0 = I$ și se obține:

$$\lambda_{01} = l_{01} \frac{I_0}{I_{01}} = 6 \cdot \frac{I}{2I} = 3 \text{ m},$$

$$\lambda_{12} = l_{12} \frac{I_0}{I_{12}} = 6 \cdot \frac{I}{2I} = 3 \text{ m},$$

$$\lambda_{23} = l_{23} \frac{I_0}{I_{23}} = 4 \cdot \frac{I}{I} = 4 \text{ m}.$$

Lungimile transformate au fost scrise pe sistemul de bază.

Încărcînd sistemul de bază cu diagrama M_p răsturnată, ca încărcare exterioară, în reazemele 1 și 2 apar reacțiunile fictive R_{12} și R_{21} . Deoarece parabola reprezintă o încărcare simetrică pentru deschiderea 1—2, reacțiunile fictive sînt egale și au valoarea:

$$R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2} \Omega_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 90 \cdot 6 = 180 \text{ kN.}$$

Semnul acestor reacțiuni este pozitiv deoarece au sensul de jos în sus.

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 0 + 2(3 + 3)X_1 + 3X_2 = -6 \cdot 180 \cdot \frac{1}{2} \\ 3X_1 + 2(3 + 4)X_2 + 0 = -6 \cdot 180 \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

sau după efectuarea operațiilor aritmetice:

$$\begin{cases} 4X_1 + X_2 = -180 \\ 3X_1 + 14X_2 = -540. \end{cases}$$

Se observă că fiecare ecuație conține două necunoscute, deoarece în secțiunile din dreptul reazemelor extreme, 0 și 3, momentele încovoietoare sînt egale cu zero.

Rezolvînd sistemul de ecuații rezultă următoarele valori ale necunoscutelor:

$$X_1 = -37,36 \text{ kNm}, X_2 = -30,57 \text{ kNm.}$$

Diagrama finală de moment încovoietor se obține ținînd seama că X_1 și X_2 sînt momentele încovoietoare reale în secțiunile 1 și 2, deoarece în aceste secțiuni $M_p = 0$. Suprapunerea de efecte are loc numai în secțiunile din deschideri.

Diagrama de forță tăietoare se determină așa cum s-a procedat și la cadre, considerînd separat fiecare deschidere încărcată cu momentele încovoietoare de la capete și încărcarea dată.

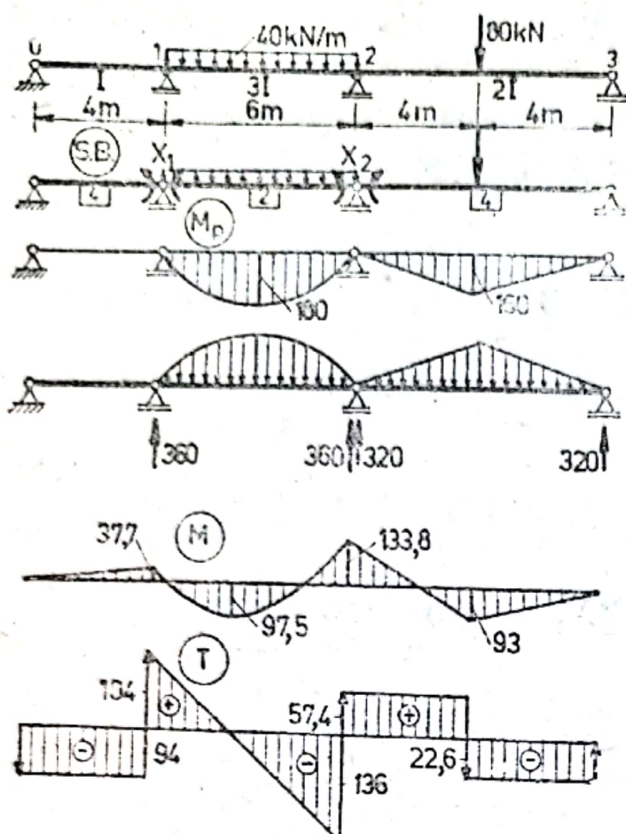


Fig. 11.2

Problema 11.2. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.2.

Calculul lungimilor transformate (se alege $I_0 = I$):

$$\lambda_{01} = 4 \text{ m},$$

$$\lambda_{12} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ m},$$

$$\lambda_{23} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ m}.$$

Reacțiunile fictive din reazeme:

$$\begin{aligned} R_{12} = R_{21} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 180 = \\ &= 360 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 160 = 320 \text{ kN}.$$

Sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2(4 + 2)X_1 + 2X_2 = -6 \cdot 360 \cdot \frac{1}{3} \\ 2X_1 + 2(2 + 4)X_2 = -6 \cdot 360 \cdot \frac{1}{3} - 6 \cdot 320 \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} 6X_1 + X_2 = -360 \\ X_1 + 6X_2 = -840 \end{cases}$$

Rezultă: $X_1 = -37,7 \text{ kNm}$ și $X_2 = -133,8 \text{ kNm}$.

Problema 11.3. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă cu consolă, din figura 11.3. Lungimile transformate (se alege $I_0 = I$):

$$\lambda_{01} = 0, \quad \lambda_{12} = 3 \text{ m}, \quad \lambda_{23} = 6 \text{ m}.$$

Reacțiunile fictive:

$$R_{12} = R_{21} = 135 \text{ kN}.$$

Pentru calculul reacțiilor fictive pe deschiderea 2 — 3, cu consolă, se ia în considerație efectul consolei asupra deschiderii și anume se introduce ca încărcare exterioară numai diagrama triunghiulară de pe deschiderea 2 — 3:

$$R_{23} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 30 \text{ kN},$$

$$R_{32} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 60 \text{ kN}.$$

Aceste reacțiuni au sensul de sus în jos și se introduc în ecuații cu semnul minus.

Sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3X_1 + 3X_2 = \\ = -6 \cdot 135 \cdot \frac{1}{2} \\ 3X_1 + 2(3+6)X_2 = \\ = -6 \cdot 135 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 30 \cdot \frac{1}{1} \end{cases}$$

și soluția: $X_1 = -66,8 \text{ kNm}$,
 $X_2 = -1,36 \text{ kNm}$.

Consola fiind un element static determinat, diagrama de moment încovoietor este în final aceeași ca și în diagrama M_p .

Problema 11.4. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.4.

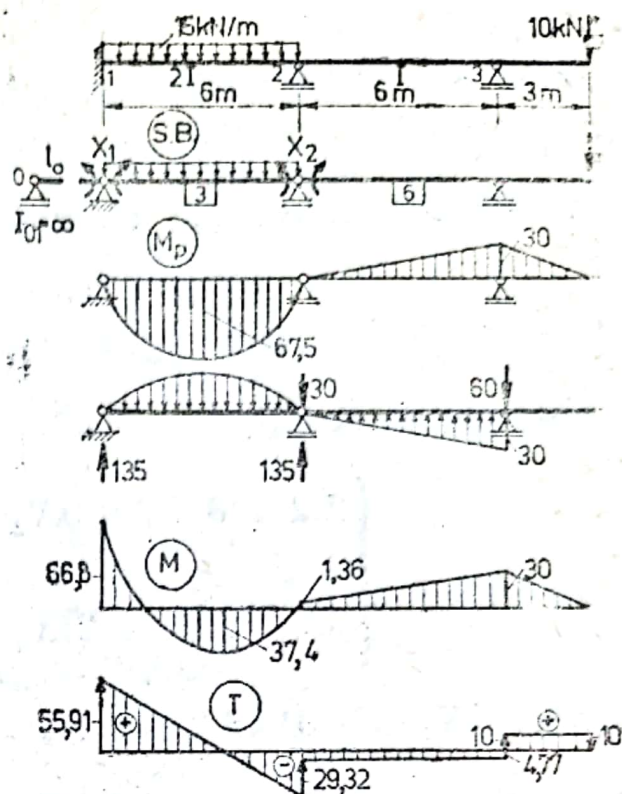


Fig. 11.3

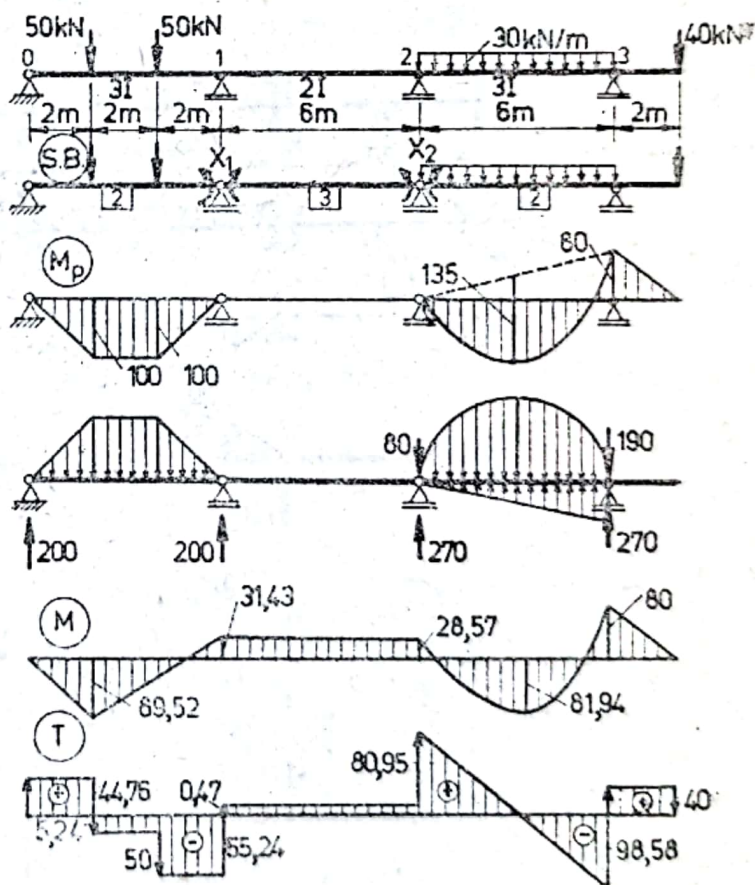


Fig. 11.4

Lungimile transformate ($I_0 = I$):

$$\lambda_{01} = 2 \text{ m}, \quad \lambda_{12} = 3 \text{ m}, \quad \lambda_{23} = 2 \text{ m}.$$

Reacțiunile fictive din reazeme:

$$\begin{aligned} R_{01} &= R_{10} = 200 \text{ kN}, \\ R_{23} &= 270 - 80 = 190 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2(2 + 3)X_1 + 3X_2 = -6 \cdot 200 \cdot \frac{1}{3} \\ 3X_1 + 2(3 + 2)X_2 = -6 \cdot 190 \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$$

și soluția: $X_1 = -31,43 \text{ kNm}$, $X_2 = -28,57 \text{ kNm}$.

Problema 11.5. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.5.

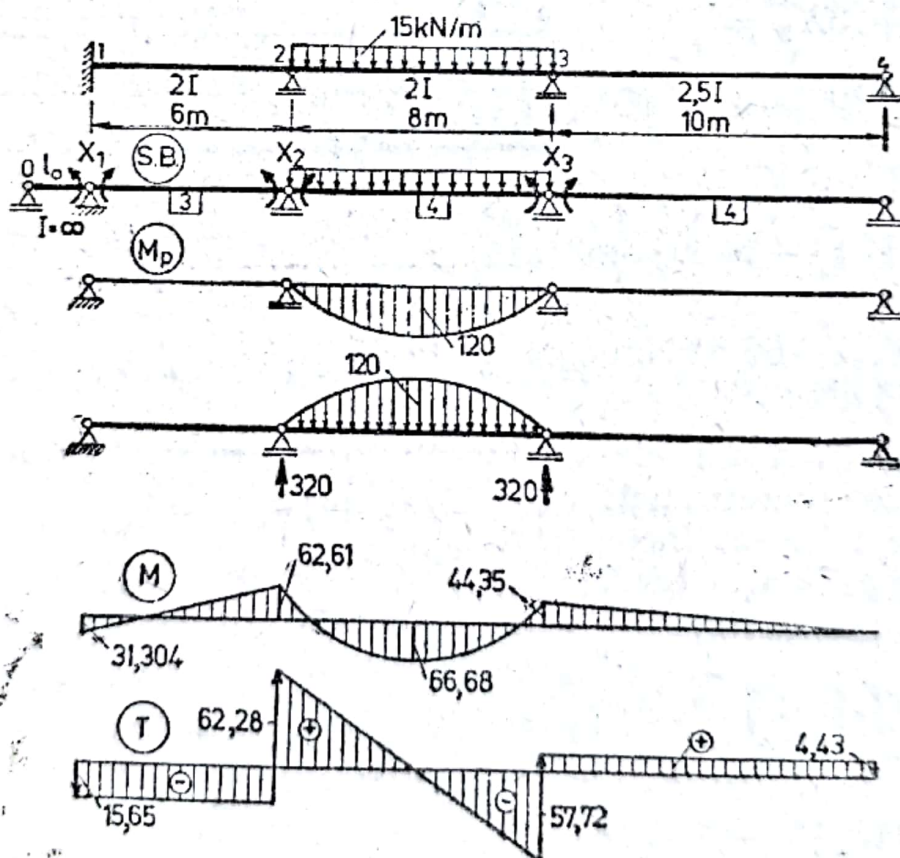


Fig. 11.5

Lungimile transformate, adoptînd $I_0 = I$, sînt :

$$\lambda_{01} = 0, \text{ deoarece s-a ales } I_{01} = \infty,$$

$$\lambda_{12} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ m},$$

$$\lambda_{23} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ m},$$

$$\lambda_{34} = 10 \cdot \frac{1}{2,5} = 4 \text{ m}.$$

Reacțiunile fictive din reazemele sistemului de bază sînt :

$$\mathfrak{R}_{23} = \mathfrak{R}_{32} = 320 \text{ kN}.$$

Sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} 2(0 + 3)X_1 + 3X_2 = 0 \\ 3X_1 + 2(3 + 4)X_2 + 4X_3 = -6 \cdot 320 \cdot \frac{1}{2} \\ 4X_2 + 2(4 + 4)X_3 = -6 \cdot 320 \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

sau :

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 0 \\ 3X_1 + 14X_2 + 4X_3 = -960 \\ X_2 + 4X_3 = -240. \end{cases}$$

Soluția sistemului :

$$X_1 = 31,3 \text{ kNm}, X_2 = -62,61 \text{ kNm}, X_3 = -44,35 \text{ kNm}.$$

Observație. Dacă deschiderea care are un capăt încastrat, nu este încărcată cu forțe exterioare, atunci momentul încovoietor din încastrare este egal cu jumătate din valoarea momentului încovoietor de la celălalt capăt al deschiderii. Diagrama are o variație liniară și intersectează axa de referință la $\frac{1}{3} l$, începînd de la capătul încastrat.

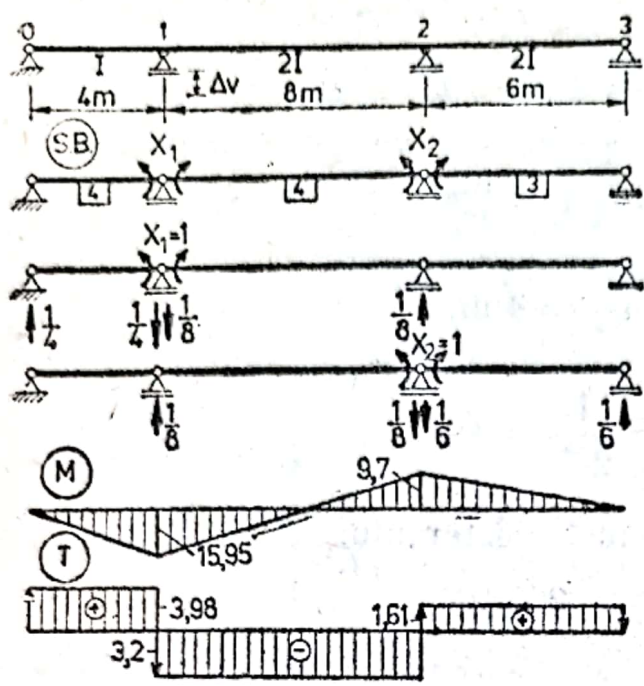


Fig. 11.6

Problema 11.6. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.6, încărcată cu cedarea reazemului 1 pe verticală cu 4 cm. Se dă $EI = 2400 \text{ kNm}^2$.

Lungimile transformate, pentru $I_0 = I$, rezultă:

$$\lambda_{01} = 4 \text{ m}, \quad \lambda_{12} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ m},$$

$$\lambda_{23} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ m}.$$

Termenii liberi ai sistemului de ecuații:

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum r_{k1} \Delta_k = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) 0,04 = -\frac{0,03}{2}.$$

$$\Delta_{2\Delta} = -\sum r_{k2} \Delta_k = -\left(-\frac{1}{8}\right) 0,04 = 0,005.$$

Sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2(4 + 4)X_1 + 4X_2 = 6EI_0(0,015) \\ 4X_1 + 2(4 + 3)X_2 = 6EI_0(-0,005). \end{cases}$$

Ținând seama că $EI_0 = 2400$ și rezolvând sistemul de ecuații rezultă:

$$X_1 = 15,05 \text{ kNm} \quad \text{și} \quad X_2 = -9,7 \text{ kNm}.$$

Problema 11.7. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.7. Încărcarea este reprezentată de rotirea încastrării din capătul 1 cu un unghi $\theta = 1^\circ$. Se dă $EI = 2800 \text{ kNm}^2$.

Lungimile transformate ($I_0 = I$):

$$\lambda_{12} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ m}, \quad \lambda_{23} = 9 \cdot \frac{1}{4} = 2,25 \text{ m}.$$

Termenii liberi :

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum r_{k1} \Delta_k = -(1 \cdot 0,0174)$$

$$0 = 1^\circ = 0,0174 \text{ radiani}$$

$$\Delta_{2\Delta} = 0.$$

Reazemele nu au tasări, deci reacțiunile din încărcările cu $X_1 = 1$ și $X_2 = 1$, nu produc lucru mecanic. În schimb produce lucru mecanic necunoscuta moment încovoietor $X_1 = 1$, parcurgînd rotirea $\theta = 1^\circ$. Rezultă $\Delta_{1\Delta} = -(1 \cdot \theta)$ și apoi :

$$\begin{cases} 2 \cdot 3X_1 + 3X_2 = -6EI_0(-0,0174) \\ 3X_1 + 2(3 + 2,25)X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 97,44 \\ X_1 + 3,5X_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 36,54 \text{ kNm}, \quad X_2 = -10,44 \text{ kNm},$$

Problema 11.8. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.8. Reazemul 3 cedează pe verticală cu 3 cm ($v_3 = 3 \text{ cm}$), iar produsul $EI = 3000 \text{ kNm}^2$.

Lungimile transformate ($I_0 = I$) :

$$\lambda_{12} = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \text{ m}, \quad \lambda_{23} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ m}, \quad \lambda_{34} = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3 \text{ m}.$$

Reacțiunile fictive din reazeme :

$$\mathfrak{R}_{12} = \mathfrak{R}_{21} = 320 \text{ kN},$$

$$\mathfrak{R}_{34} = 487,5 \text{ kN},$$

$$\mathfrak{R}_{43} = 367,5 \text{ kN}.$$

Efectul cedării de reazem :

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum r_{k1} \Delta_k = -\left(-\frac{1}{6} \cdot 0,03\right) = \frac{0,01}{2}$$

$$\Delta_{2\Delta} = -\sum r_{k2} \Delta_k = -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) \cdot 0,03 = -\frac{0,025}{3}.$$

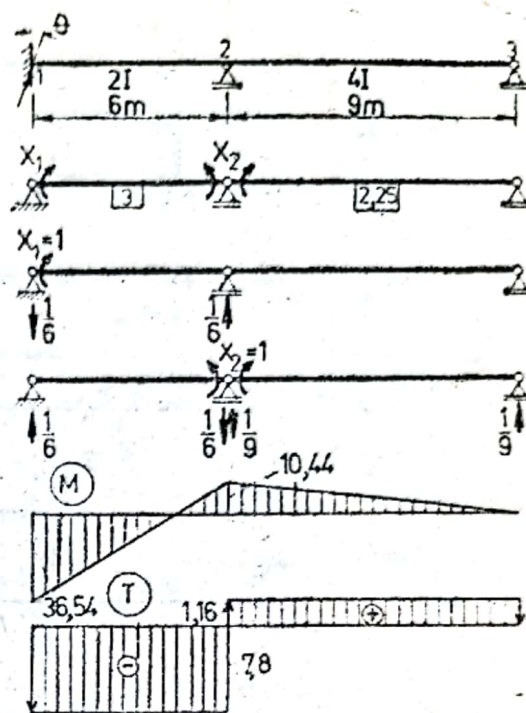


Fig. 11.7

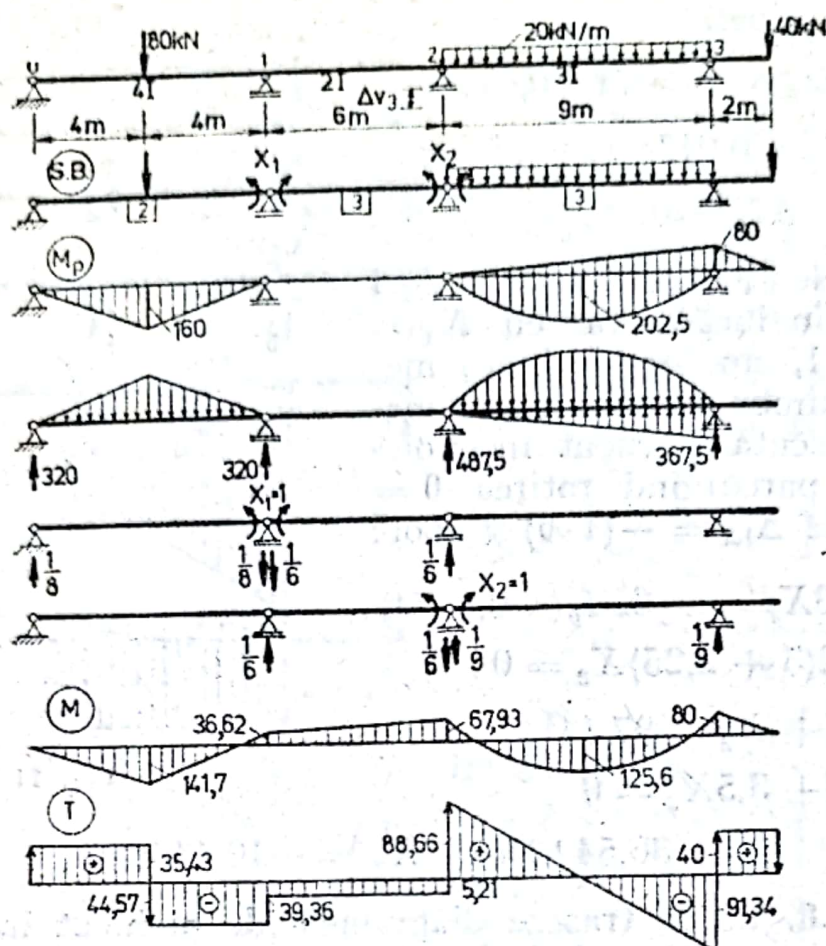


Fig. 11.8

Sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} 2(2 + 3)X_1 + 3X_2 = -6 \cdot 320 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot 3000 \cdot \frac{0,01}{3} \\ 3X_1 + 2(3 + 3)X_2 = -6 \cdot 487,5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot 3000 \cdot \frac{0,025}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10X_1 + 3X_2 = -570 \\ 3X_1 + 12X_2 = -825 \end{cases}$$

Soluția :

$$X_1 = -36,62 \text{ kNm}, \quad X_2 = -67,93 \text{ kNm}.$$

Problema 11.9. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.9, supusă acțiunii variației de temperatură indicată pentru fie-

Scanned with OKEN Scanner

$$I_{12} = I_{01} = 54 \text{ dm}^4 = 54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_0 = 54 \text{ dm}^4$$

$$= 6 \text{ m}, \lambda_{23} = 4 \cdot \frac{54}{16} = 13,5 \text{ m}$$

$$EI_0 = 200\,000 \cdot \text{daN/cm}^2 \cdot 540 \cdot 10^{-4} \text{m}^4 = 108\,000 \text{ kNm}^2$$

$$\begin{cases} 2(6 + 6)X_1 + 6X_2 = -3.108\,000 \cdot \alpha \left(\frac{14}{0,6} \cdot 6 + \frac{22}{0,6} \cdot 6 \right) \\ 6X_1 + 2(6 + 13,5)X_2 = -3.108\,000 \cdot \alpha \left(\frac{22}{0,6} \cdot 6 + \frac{18}{0,4} \cdot 4 \right) \end{cases}$$

$$\alpha = 10^{-5}$$

$$\begin{cases} 4X_1 + X_2 = -194,4 \\ X_1 + 6,5X_2 = -216 \end{cases}$$

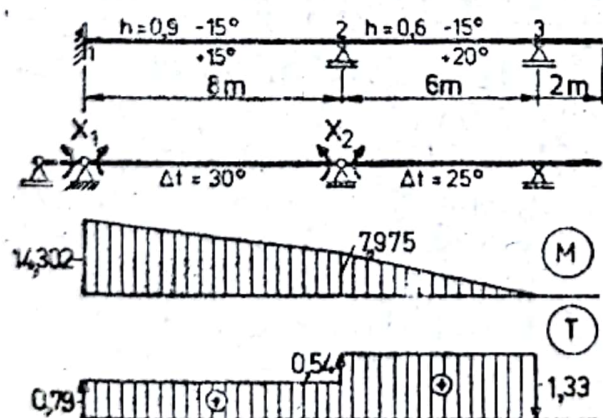


Fig. 11.10

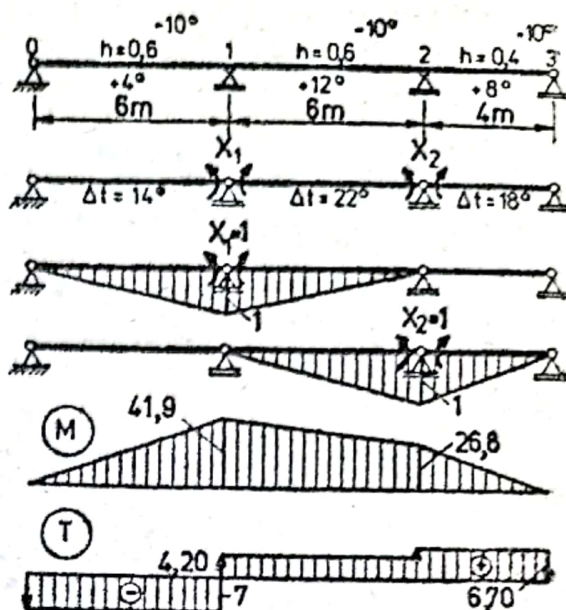


Fig. 11.9

$$X_1 = -41,9 \text{ kNm}, X_2 = -26,8 \text{ kNm}.$$

Observație. Fibra întinsă este fibra răcită.

Problema 11.10. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă din figura 11.10, supusă variației de temperatură. Se dau:

$$E = 200000 \text{ daN/cm}^2 \text{ și } b = 30 \text{ cm.}$$

$$I_{12} = \frac{3 \cdot 9^3}{12} = 182,25 \text{ dm}^4 = 182,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{23} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4 = 54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_0 = 54 \text{ dm}^4$$

$$\lambda_{01} = 6 \text{ m}$$

$$\lambda_{12} = 8 \cdot \frac{54}{182,25} = 2,37 \text{ m}$$

$$\lambda_{23} = 6 \cdot \frac{54}{54} = 6 \text{ m}$$

$$EI_0 = 200\,000 \text{ daN/cm}^2 \cdot 54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = 108\,000 \text{ kNm}^2$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 2,37X_1 - 2,37X_2 = -3 \cdot 108\,000 \cdot \alpha \cdot \frac{30}{0,9} \cdot 8 \\ 2,37X_1 + 2(2,37 \cdot 6)X_2 = -3 + 108\,000 \cdot \alpha \left(\frac{30}{0,9} \cdot 8 + \frac{25}{0,6} \cdot 6 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = -36,4 \\ X_1 + 7,06X_2 = -70,6 \end{cases}$$

$$X_1 = -14,302 \text{ kNm},$$

$$X_2 = -7,975 \text{ kNm}.$$

Consola fiind un element static determinat, se deformează liber sub acțiunea variației de temperatură și nu apar eforturi, pe toată lungimea sa.

Problema 11.11. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă cu secțiune variabilă din figura 11.11. Se dă $b = 30 \text{ cm}$. Coeficienții de secțiune variabilă se iau din lucrarea [1] sau din volumul 2 al prezentei lucrări (anexa 2).

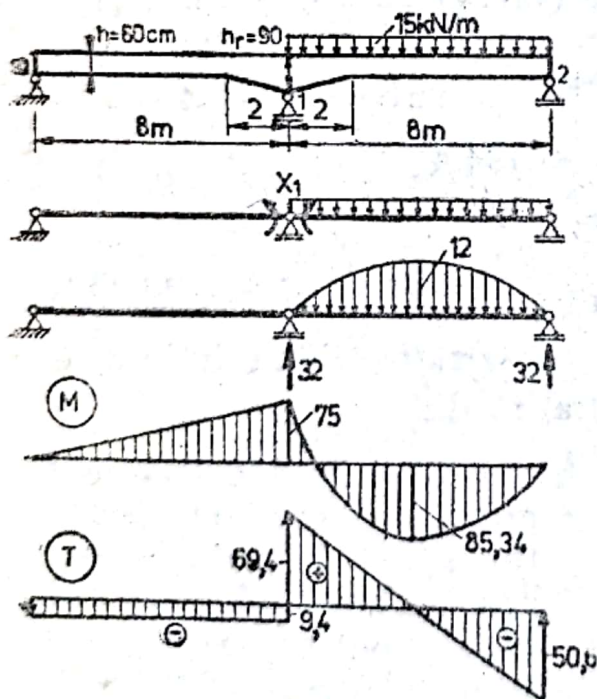


Fig. 11.11

Calculul momentelor de inerție:

$$I_0 = I_2 = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{ dm}^4 = 54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_1 = \frac{3 \cdot 9^3}{12} = 182,25 \text{ dm}^4 = 182,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Coeficienții de secțiune variabilă:

Bara 0 - 1

Lungimea vutei, $\lambda l = 2 \text{ m}$

$$\lambda = \frac{2}{8} = 0,25, \quad n = \frac{54}{182,25} = 0,296,$$

$$c' = 0,997, \quad c'' = 0,726, \quad c = 0,948.$$

Bara 1 - 2

$$\lambda = 0,25, \quad n = 0,296$$

$$c' = 0,726, \quad c'' = 0,997, \quad c = 0,948.$$

Coeficienții de încărcare:

$$s'm_{12} = \alpha_1 p l^2 = 0,227 \cdot 15 \cdot 8^2 = 218$$

$$s''m_{21} = \alpha_2 p l^2 = 0,247 \cdot 15 \cdot 8^2 = 237$$

Ecuația de condiție,

$$2(0,726 \cdot 8 + 0,726 \cdot 8)X_1 = -218,8$$

Soluția,

$$X_1 = -75 \text{ kNm}.$$

Problema 11.12. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la grinda continuă cu secțiune variabilă din figura 11.12. Lățimea secțiunii transversale este de 30 cm. Coeficienții de secțiune variabilă se iau din lucrarea [1] sau din volumul 2 al prezentei lucrări (anexa 2).

$$I_{min} = 54 \text{ dm}^4$$

$$I_{max} = 182,25 \text{ dm}^4$$

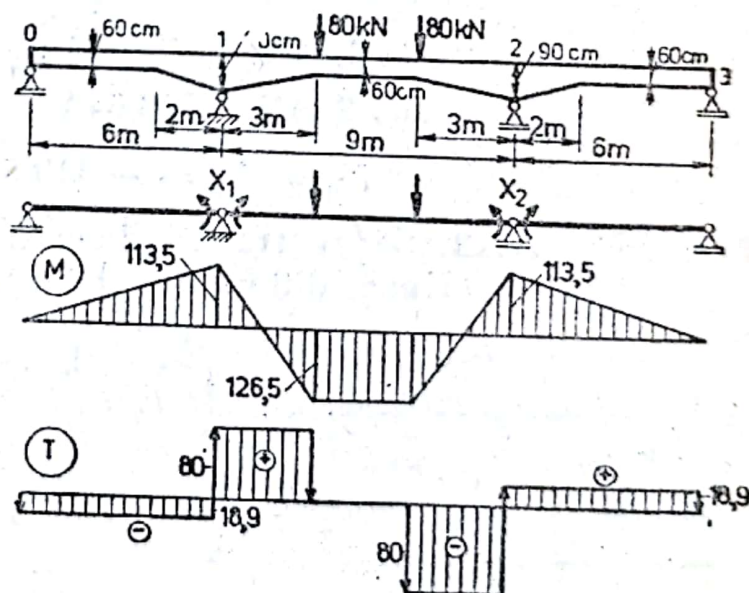


Fig. 11.12

Bara 0 - 1

$$\lambda = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad n = \frac{54}{182,25} = 0,296$$

$$c' = 0,992, \quad c'' = 0,664, \quad c = 0,910$$

Bara 1 - 2

$$\lambda = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad n = 0,296$$

$$c' = c'' = 0,652, \quad c = 0,822.$$

Coeficienții de încărcare

$$s'm_{12} = (\alpha_5 + \alpha_6)Pl = (0,296 + 0,249)80 \cdot 9 = 392$$

$$s''m_{21} = s'm_{12} = 392.$$

Bara 2 - 3

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad n = 0,296$$

$$c' = 0,664, \quad c'' = 0,992, \quad c = 0,910.$$

$$I_0 = 54 \text{ dm}^4$$

$$\lambda_{01} = 6 \text{ m}, \quad \lambda_{12} = 9 \text{ m}, \quad \lambda_{23} = 6 \text{ m}.$$

$$\begin{cases} 2(0,992 \cdot 6 + 0,652 \cdot 9)X_1 + 0,822 \cdot 9X_2 = -392 \cdot 9 \\ 0,822 \cdot 9X_1 + 2(0,652 \cdot 9 + 0,992 \cdot 6)X_2 = -392 \cdot 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23,64X_1 + 7,398X_2 = -3528 \\ 7,398X_1 + 23,64X_2 = -3528 \end{cases}$$

$$X_1 = X_2 = -113,5 \text{ kNm}.$$

Problema 11.13. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă din figura 11.13, utilizând procedeul punctelor fixe.

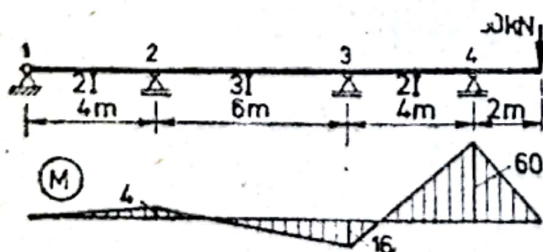


Fig. 11.13

Lungimile transformate, pentru $I_0 = I$, sînt:

$$\lambda_{12} = \lambda_{34} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ m},$$

$$\lambda_{23} = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \text{ m}.$$

Calculul coeficienților r_i ;

Grinda are capătul din stînga articulat, deci se utilizează relațiile (XI.14):

$$r_1 = \infty, \text{ deoarece } M_1 = 0$$

$$r_2 = 2 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} \left(2 - \frac{1}{r_1} \right) = 2 + \frac{2}{2} \cdot 2 = 4,$$

$$r_3 = 2 + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}} \left(2 - \frac{1}{r_2} \right) = 2 + \frac{2}{2} \left(2 - \frac{1}{4} \right) = 3,75.$$

Momentul încovoietor pe reazemul 4 este $M_4 = -30 \cdot 2 = -60 \text{ kNm}$, iar momentele încovoietoare pe celelalte reazeme se obțin ținînd seama de valorile coeficienților r_i :

$$r_3 = -\frac{M_4}{M_3}, \quad M_3 = -\frac{-60}{3,75} = 16 \text{ kNm},$$

$$r_2 = -\frac{M_3}{M_2}, \quad M_2 = -\frac{M_3}{r_2} = \frac{M_4}{r_3 r_2} = -4 \text{ kNm}.$$

Observație. Momentele încovoietoare care produc întinderea fibrei inferioare se consideră pozitive în calcule, iar cele care produc întinderea fibrei superioare se consideră negative.

Problema 11.14. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la grinda continuă din figura 11.14, utilizînd procedeul punctelor fixe.

Lungimile transformate ($I_0 = I$):

$$\lambda_{12} = 2,5 \text{ m}, \quad \lambda_{23} = 3 \text{ m}, \quad \lambda_{34} = 4 \text{ m}.$$

Calculul coeficienților r_i :

Grinda avînd un capăt încastat, se utilizează relațiile (XI.16).

$$r_1 = 2,$$

$$r_2 = 2 + \frac{2,5}{3} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3,25,$$

$$r_3 = 2 + \frac{3}{4} \left(2 - \frac{1}{3,25} \right) = 3,27.$$

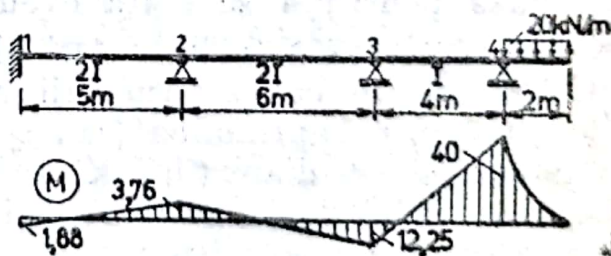


Fig. 11.14

Momentul încovoietor pe reazemul 4 este $M_4 = -2 \cdot 20 = -40$ kNm, iar celelalte rezultă:

$$M_3 = -\frac{M_4}{r_3}, M_3 = 12,25 \text{ kNm}; M_2 = -\frac{M_3}{r_2},$$

$$M_2 = -3,76 \text{ kNm}; M_1 = -\frac{M_3}{r_1}, M_1 = 1,88 \text{ kNm}.$$

B. GRINZI CU ZĂBRELE STATIC NEDETERMINATE

Tratarea distinctă a grinzilor cu zăbrele static nedeterminate, în vederea utilizării pentru rezolvare a particularităților de aplicare a metodei forțelor, se justifică prin larga folosire practică a acestei categorii de structuri.

Grinzile pot fi static nedeterminate exterior (fig. XI.3, a), static nedeterminate interior (fig. XI.3, b) sau static nedeterminate exterior și interior în același timp (fig. XI.3, c).

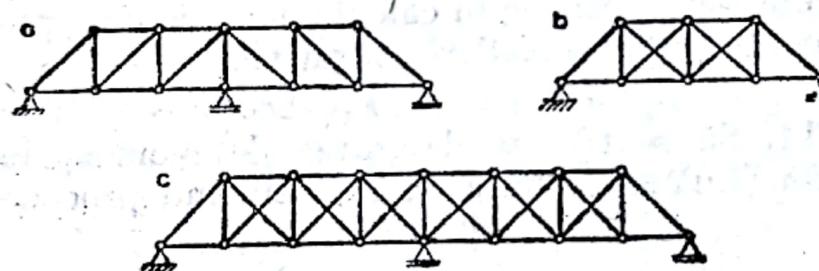


Fig. XI.3

Calculul se efectuează parcurgând etapele prezentate în capitolul precedent. O atenție deosebită trebuie acordată alegerii sistemului de bază pentru a se evita eventualele forme critice. De asemenea se urmărește ca sistemul de ecuații ce rezultă să fie cât mai simplu.

Astfel, în cazul structurii din figura XI.4, a, alegând sistemul de bază prin suprimarea (sau secționarea) barelor de deasupra reazemelor intermediare (fig. XI.4, b, c), se obține un sistem de ecuații de tipul celui de la grinda continuă. Dacă grinda este cu diagonale duble (fig. XI.5, a), sistemul de bază se alege suprimând (sau secționând) câte o bară din fiecare panou (fig. XI.5, b, c) și se observă că din încărcarea cu valoarea-unitate a unei necunoscute X_i rezultă

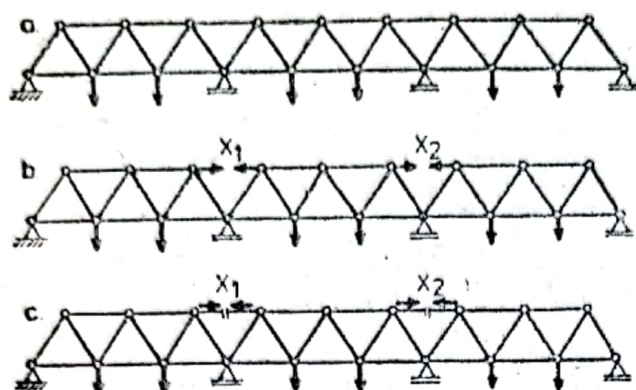


Fig. XI.4

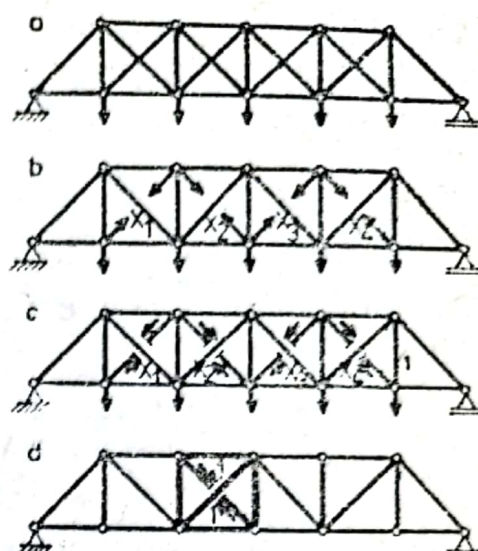


Fig. XI.5

eforturi numai în barele panoului respectiv (fig. XI.5, d). În consecință o ecuație de condiție conține trei necunoscute consecutive, indiferent de numărul panourilor. Ca și în cazul precedent, rezultă un sistem de ecuații de tip bandă, avînd lățimea benzii egală cu 3.

Cînd sistemul de bază se obține prin suprimarea barelor, deplasările după direcțiile necunoscutelor sînt diferite de zero și sînt proporționale cu eforturile necunoscute. Exemplificînd pentru X_i , rezultă

$$\begin{aligned} \delta_{i1}X_1 + \dots + \delta_{ii}X_i + \delta_{ij}X_j + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = \\ = -\frac{l_i}{EA_i} X_i, \end{aligned} \quad (\text{XI.19})$$

unde $\frac{l_i}{EA_i} = \rho_i$ reprezintă alungirea barei i din încărcarea cu $X_i = 1$.

Obișnuit această ecuație se scrie sub forma

$$\delta_{i1}X_1 + \dots + (\delta_{ii} + \rho_i)X_i + \delta_{ij}X_j + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0. \quad (\text{XI.20})$$

Dacă sistemul de bază se obține prin secționarea barelor, corespunzător necunoscutei X_i , de exemplu, ecuația de condiție va exprima $\Delta_i = 0$,

$$\delta_{i1}X_1 + \dots + \delta_{ii}X_i + \delta_{ij}X_j + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0. \quad (\text{XI.21})$$

La alcătuirea coeficientului necunoscutului principale trebuie desigur să se țină seama și de efectul efortului din bara i , care va interveni cu corecția

$$\rho_i = \frac{l_i}{EA_i}.$$

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi se calculează cu relațiile :

$$\delta_{ii} = \int \frac{n_i^2}{EA} dx = \sum \frac{n_{kh,i}^2 l_{kh}}{EA_{kh}},$$

[dacă ecuația de condiție se scrie sub forma (XI.21) suma se extinde inclusiv asupra barei secționată],

$$\delta_{ij} = \int \frac{n_i n_j}{EA} dx = \sum \frac{n_{kh,i} n_{kh,j} l_{kh}}{EA_{kh}}, \quad (\text{XI.22})$$

$$\Delta_{ip} = \int \frac{n_i N_p}{EA} dx = \sum \frac{n_{kh,i} N_{kh,p} l_{kh}}{EA_{kh}}.$$

Eforturile finale se determină prin însumarea efectelor parțiale,

$$N_{kh} = N_{kh,p} + \sum n_{kh,i} X_i. \quad (\text{XI.23})$$

Pentru ușurința efectuării și urmăririi calculelor, acestea se organizează într-un tabel.

APLICAȚII

Problema 11.15. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele static nedeterminate din figura 11.15. Se consideră că toate barele au aria secțiunii transversale egală cu A .

Sistemul de bază s-a ales secționînd barele suplimentare din fiecare panou. Din încărcarea cu $X_1 = 1$ apar eforturi diferite de zero numai în barele panoului din care face parte bara în locul căreia s-a introdus necunoscuta X_1 . Trebuie reținut că în bara secționată a acestui panou, apare un efort egal cu unitatea. Din încărcarea cu $X_2 = 1$ și cu forțele exterioare, eforturile în această bară sînt zero. Aspectul discutat poate fi urmărit ușor în tabelul 11.1.

Tabelul 11.1

Bara	l	A	N_p	n_1	n_2	$\frac{n_1^2}{EA} l$	$\frac{n_2^2}{EA} l$	$\frac{n_1 n_2}{EA} l$	$\frac{n_1 N_p}{EA} l$	$\frac{n_2 N_p}{EA} l$	N
1-2	3	A	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	0	0	8,84
1-3	3	A	20	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	$-\frac{30\sqrt{2}}{EA}$	0	28,82
1-4	$3\sqrt{2}$	A	$20\sqrt{2}$	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{EA}$	0	0	$\frac{120}{EA}$	0	15,7
2-3	$3\sqrt{2}$	A	0	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{EA}$	0	0	0	0	-12,5
2-4	3	A	-40	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	$\frac{60\sqrt{2}}{EA}$	0	-31,18
3-4	3	A	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2EA}$	$\frac{3}{2EA}$	$\frac{3}{2EA}$	0	0	0
3-5	3	A	20	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	$-\frac{30\sqrt{2}}{EA}$	11,18
3-6	$3\sqrt{2}$	A	0	0	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{EA}$	0	0	0	12,5
4-5	$3\sqrt{2}$	A	$-20\sqrt{2}$	0	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{EA}$	0	0	$-\frac{120}{EA}$	-15,7
4-6	3	A	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	0	-8,84
5-6	3	A	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	0	-8,84
Σ						$\frac{14,46}{EA}$	$\frac{14,46}{EA}$	$\frac{1,5}{EA}$	$\frac{162,3}{EA}$	$-\frac{162,3}{EA}$	

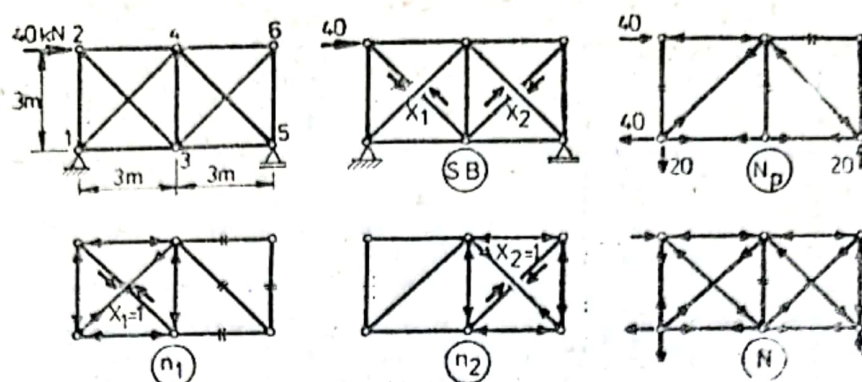


Fig. 11.15

Sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} 14,46X_1 + 1,5X_2 + 162,3 = 0 \\ 1,5X_1 + 14,46X_2 - 162,3 = 0 \end{cases}$$

Valorile necunoscutelor :

$$X_1 = -12,5 \text{ kN}, X_2 = 12,5 \text{ kN}.$$

Eforturile finale, calculate cu relația (XI.23), sînt înscrise în ultima coloană a tabelului 11.1.

Problema 11.16. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 11.16. Se dau următoarele secțiuni pentru bare : talpa superioară $2A$, talpa inferioară A , diagonale și montanți $0,5A$. Grinda cu zăbrele este o dată static nedeterminată exterior.

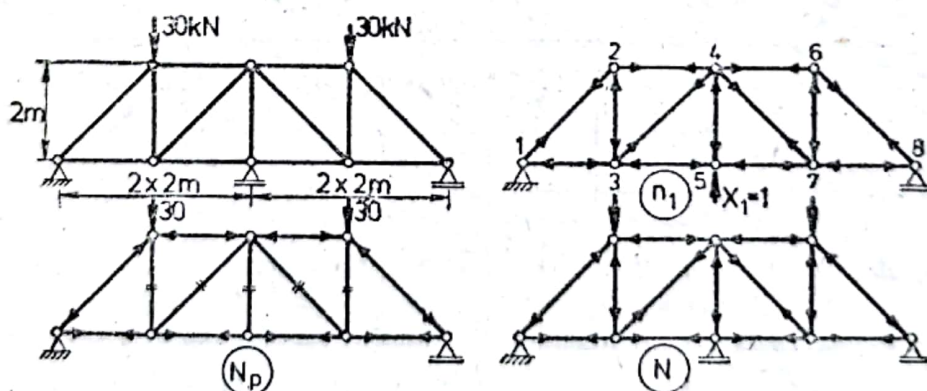


Fig. 11.16

Tabelul 11.2

Bara	l	A	N_p	n_1	$\frac{n_1^2}{EA} l$	$\frac{n_1 N_p}{EA} l$	N
1-2	$2\sqrt{2}$	$2A$	$-30\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2EA}$	$-\frac{30\sqrt{2}}{EA}$	-31,11
1-3	2	A	30	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{EA}$	$-\frac{30}{EA}$	22,0
2-3	2	$\frac{1}{2} A$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{EA}$	0	- 8,0
2-4	2	$2A$	-30	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4EA}$	$-\frac{30}{2EA}$	-22,0
3-4	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2} A$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	0	11,31
3-5	2	A	30	-1	$\frac{2}{EA}$	$-\frac{60}{EA}$	14,0
4-5	2	$\frac{1}{2} A$	0	-1	$\frac{4}{EA}$	0	-16,0
4-6	2	$2A$	-30	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4EA}$	$-\frac{30}{3EA}$	-22,0
4-7	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2} A$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	0	11,31
5-7	2	4	30	-1	$\frac{2}{EA}$	$-\frac{60}{EA}$	14,0
6-7	2	$\frac{1}{2} A$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{EA}$	0	- 8,0
6-8	$2\sqrt{2}$	$2A$	$-30\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2EA}$	$-\frac{30\sqrt{2}}{EA}$	-22,0
7-8	2	A	30	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2EA}$	$-\frac{30}{EA}$	22,0
Σ					$\frac{18,55}{EA}$	$-\frac{294,6}{EA}$	

Sistemul de bază a fost ales prin îndepărtarea reazemului interior. Coeficientul necunoscutei și termenul liber sînt :

$$\delta_{11} = \frac{18,55}{EA},$$

$$\Delta_{1p} = - \frac{294,6}{EA}.$$

Ecuția de condiție este,

$$18,55X_1 - 294,6 = 0.$$

Pentru necunoscuta X_1 rezultă valoarea,

$$X_1 = 16 \text{ kN}.$$

Eforturile finale sînt înscrise în ultima coloană a tabelului 11.2 și au sensurile trecute în figura 11.16.

Problema 11.17. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 11.17. Secțiunile barelor sînt cele de la aplicația precedentă.

Grinda cu zăbrele este de două ori static nedeterminată, o dată exterior și o dată interior.

Sistemul de ecuații :

$$18,55X_1 + 3,65X_2 - 294,6 = 0$$

$$3,65X_1 + 16,78X_2 - 21,2 = 0$$

Valorile necunoscutelor :

$$X_1 = 16,35 \text{ kN}, X_2 = - 2,27 \text{ kN}.$$

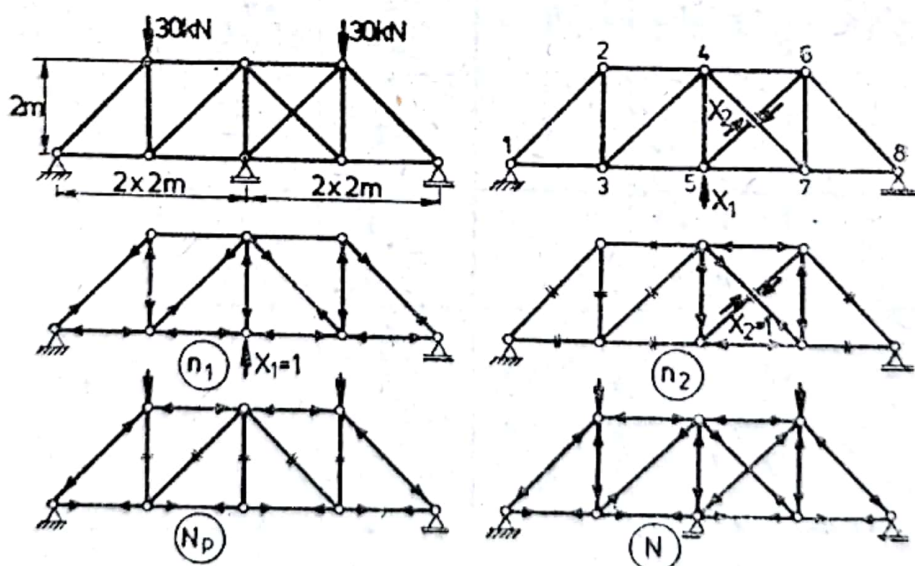


Fig. 11.17

Tabelul 11.3

Bara	l	A	N_p	n_1	n_2	$\frac{n_1^2}{EA} l$	$\frac{n_2^2}{EA} l$	$\frac{n_1 n_2}{EA} l$	$\frac{n_1 N_p}{EA} l$	$\frac{n_2 N_p}{EA} l$	N
1-2	$2\sqrt{2}$	$2A$	$-30\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2EA}$	0	0	$-\frac{30\sqrt{2}}{EA}$	0	-30,86
1-3	2	A	30	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2EA}$	0	0	$-\frac{30}{EA}$	0	21,83
2-3	2	$\frac{1}{2}A$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{2EA}$	0	0	0	0	-8,17
2-4	2	$2A$	-30	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4EA}$	0	0	$-\frac{30}{2EA}$	0	-21,83
3-4	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}A$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	0	0	0	0	11,56
3-5	2	A	30	-1	0	$\frac{2}{EA}$	0	0	$-\frac{60}{EA}$	0	13,65
4-5	2	$\frac{1}{2}A$	0	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{EA}$	$\frac{2}{EA}$	$-\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	0	0	-14,75
4-6	2	$2A$	-30	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{4EA}$	$\frac{1}{4EA}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4EA}$	$\frac{30}{2EA}$	$\frac{30\sqrt{2}}{2EA}$	-20,22
4-7	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}A$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{4\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{4}{EA}$	0	0	9,29
5-6	$2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}A$	0	0	1	0	$\frac{4\sqrt{2}}{EA}$	0	0	0	-2,27
5-7	2	A	30	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2}{EA}$	$\frac{1}{EA}$	$\frac{\sqrt{2}}{EA}$	$-\frac{60}{EA}$	$-\frac{30\sqrt{2}}{EA}$	15,25
6-7	2	$\frac{1}{2}A$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{EA}$	$\frac{2}{EA}$	$\frac{\sqrt{2}}{EA}$	0	0	-6,57
6-8	$2\sqrt{2}$	$2A$	$-30\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{2}{2EA}$	0	0	$\frac{30\sqrt{2}}{EA}$	0	-30,86
7-8	2	A	30	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2EA}$	0	0	$-\frac{30}{EA}$	0	20,83
Σ						$\frac{18,55}{EA}$	$\frac{16,78}{EA}$	$\frac{3,65}{EA}$	$-\frac{294,6}{EA}$	$-\frac{21,2}{EA}$	

C. ARCE STATIC NEDETERMINATE

În practică se utilizează următoarele tipuri de arce static nedeterminate:

- arcul dublu articulat,
- arcul cu tirant,
- arcul dublu încastrat.

Primele două tipuri de arce se întâlnesc, în special, la construcțiile civile și industriale, iar al treilea tip la construcțiile de poduri și la construcțiile hidrotehnice.

La arce efortul axial joacă un rol important, din care cauză, în general, deformațiile produse de forțele axiale se iau în considerare împreună cu cele produse de momentele încovoietoare. În construcții se folosesc de obicei arce pleoștite, de aceea pentru calculul deplasărilor elastice sînt valabile expresiile de la barele drepte (se neglijează influența curburii). Cu toate acestea calculul lor este mai dificil datorită faptului că diagramele unitare sînt curbilinii, deci nu poate fi aplicată regula lui Vereșciaghin. Pe de altă parte, mici inexactități la determinarea necunoscutelor pot influența hotărîtor eforturile și ca atare este nevoie de o mare atenție la efectuarea operațiilor numerice.

1. *Arcul dublu articulat* este o singură dată static nedeterminat. Ecuația de condiție, pentru încărcarea cu forțe, are forma

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0. \quad (\text{XI.24})$$

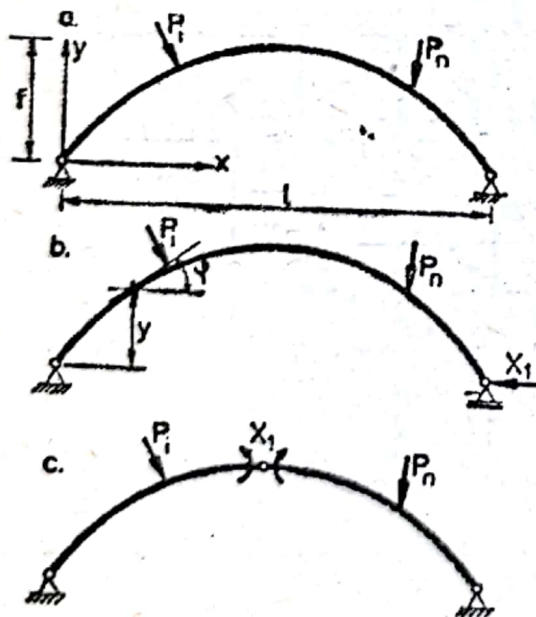


Fig. XI.6

Sistemul de bază se poate alege în două moduri: arc simplu rezemat (fig. XI. 6,b) sau arc cu trei articulații (fig. XI.6, c).

Sistem de bază arc simplu rezemat

Dacă linia nașterilor este orizontală, $m_1 = -y$ și $n_1 = -\cos \varphi$, iar cu acestea :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \int \frac{n_1^2}{EA} ds = \\ &= \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds, \end{aligned} \quad (\text{XI.25})$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p}{EI} ds + \int \frac{n_1 N_p}{EA} ds = - \int \frac{y M_p}{EI} ds - \int \frac{N_p \cos \varphi}{EA} ds.$$

Considerînd caracteristicile secțiunii de la cheie ca elemente de comparație, rezultă :

$$EI_0 \delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds, \quad (\text{XI.26})$$

$$EI_0 \Delta_{1p} = - \int \frac{I_0}{I} y M_p ds - \int \frac{I_0}{A} N_p \cos \varphi ds$$

și apoi

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p ds + \int \frac{I_0}{A} N_p \cos \varphi ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds}.$$

Din aplicații se constată că se poate admite $A = A_0 \cos \varphi$. De asemenea, dacă arcul este pleoștit, pentru încărcarea cu forțe verticale, se poate neglija efectul forței axiale N_p , iar necunoscuta X_1 se obține cu relația

$$X_1 = H = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + li_0^2}, \quad (\text{XI.27})$$

unde i_0 este raza de inerție a secțiunii de la cheie. În acest caz necunoscuta X_1 reprezintă împingerea arcului dublu articulat.

Eforturile pe arc se determină cu relațiile :

$$M = M_p - yX_1, \quad N = N_p - X_1 \cos \varphi. \quad (\text{XI.28})$$

Sisteme de bază diferite

Pentru calculul deplasării unitare δ_{11} se utilizează ca sistem de bază arcul simplu rezemat și expresia sa este cea obținută anterior.

Termenul liber se determină folosind ca sistem de bază, pentru încărcarea cu forțele exterioare date, arcul cu trei articulații.

Considerînd cazul încărcării cu forțe verticale și notînd cu H_0 împingerea arcului cu trei articulații, dacă admitem că N_p are valoarea aproximativă $N_p = -H_0 \cos \varphi$, termenul liber primește forma

$$EI_0 \Delta_{1p} = - \int \frac{I_0}{I} y M_p ds - \int \frac{I_0}{A} N_p \cos \varphi ds \quad (\text{XI.29})$$

sau

$$EI_0 \Delta_{1p} = - \int \frac{I_0}{I} y M_p ds + H_0 l_0^2. \quad (\text{XI.30})$$

Necunoscuta $X_1^* = H^*$ reprezintă diferența între împingerea arcului cu trei articulații și împingerea arcului cu două articulații. Expresia ei este

$$X_1^* = H^* = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p ds - H_0 l_0^2}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + l_0^2}, \quad (\text{XI.31})$$

iar împingerea H a arcului dublu articulat se calculează cu

$$H = H_0 - H^*. \quad (\text{XI.32})$$

Se alege ca sistem de bază arcul simplu rezemat atunci cînd axa arcului este îndepărtată de forma de coincidență, adică atunci cînd încărcarea este astfel încît momentele încovoietoare au valori mari (forțe utile). Dacă însă axa arcului este apropiată de forma de coincidență, adică încărcarea este astfel încît momentele încovoietoare cu valori foarte mici (forțe permanente), pentru calculul termenului liber din ecuația de condiție, eforturile M_p și N_p se determină pe sistemul de bază arc cu trei articulații. Soluția se justifică prin aceea că, în cazul încărcării cu forțe verticale de exemplu, $M = M_p - Hy$ se obține scăzînd două mărimi cu valori apropiate. Deci $X_1 = H$ trebuie calculat foarte exact. Folosind ca sistem de bază arcul triplu articulat, X^* reprezintă doar diferența de la H_0 la H , deci efectul lui asupra împingerii H este mult mai mic.

În mod obișnuit arcele utilizate au formă parabolică sau circulară. În ceea ce privește secțiunea, ea se alege de obicei constantă. Uneori, pentru simplificarea calculului, se pot admite legi simple de variație a momentului de inerție, deoarece aceasta influențează foarte puțin asupra împingerii, dacă nu se modifică secțiunea de la cheie.

Rezolvarea integralelor se face prin integrare directă când forma axei arcului și legea de variație a momentului încovoietor au expresii matematice simple. În caz contrar, calculul se efectuează adoptînd o metodă de integrare numerică, de exemplu operarea cu bolțari. Expresia (XI.27) a necunoscutei X_1 devine

$$X_1 = \frac{\sum y M_p \Delta w}{\sum y^2 \Delta w + l i_0^2}, \quad (\text{XI.33})$$

unde $\Delta w = \frac{I_0}{I} \Delta s$, iar Δs este lungimea unui bolțar.

Înlocuirea integrării directe prin sumare conduce la o aproximație, care este cu atît mai strînsă cu cît numărul bolțarilor este mai mare. Practic însă numărul de 8–10 asigură exactitate suficientă.

Încărcarea cu variație de temperatură. Ecuația de condiție este

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t} = 0, \quad (\text{XI.34})$$

iar termenul liber are forma generală

$$\Delta_{1t} = \alpha \int n_1 t_m ds + \alpha \int m_1 \frac{\Delta t}{h} ds, \quad (\text{XI.35})$$

care, pentru $m_1 = -y$ și $n_1 = -\cos \varphi$, devine

$$\Delta_{1t} = -\alpha \int \frac{\Delta t}{h} y ds - \alpha t_m l. \quad (\text{XI.36})$$

Necunoscuta X_1 are expresia

$$X_1 = EI_0 \alpha \frac{\int \frac{\Delta t}{h} y ds + t_m l}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + l i_0^2}. \quad (\text{XI.37})$$

Încărcarea cu cedări de reazeme. Ecuația de condiție este

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0, \quad (\text{XI.38})$$

unde

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum r_{k1} \Delta_k. \quad (\text{XI.39})$$

Necunoscuta X_1 are expresia

$$X_1 = EI_0 \frac{\sum r_{k1} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + li_0^2}. \quad (\text{XI.40})$$

2. *Arcul cu tirant.* Pentru sistemul de bază arc simplu rezemat, obținut prin secționarea tirantului, efectul tirantului apare numai în expresia deplasării unitare δ_{11} , prin termenul

$$\int \frac{n_{1t}^2}{E_t A_t} dx = \frac{l}{E_t A_t}.$$

Notînd $i_t^2 = \frac{EI_0}{E_t A_t}$, deplasarea unitară δ_{11} primește forma

$$EI_0 \delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + l(i_0^2 + i_t^2), \quad (\text{XI.41})$$

Termenii liberi au aceeași formă ca și la arc dublu articulată.

3. *Arcul dublu încastrat* este de trei ori static nedeterminat. Calculul acestor arce se efectuează folosind un procedeu specific de ortogonalizare a diagramelor unitare, denumit *procedeul transferării necunoscutelor în centrul elastic*.

Prin ortogonalizarea diagramelor unitare sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute se transformă în trei ecuații, fiecare avînd o singură necunoscută:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} &= 0, \\ \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{XI.42})$$

Pentru arc simetric din figura XI.7, a, sistemul de bază se alege ca în figura XI.7, b, unde necunoscutele au fost transferate în centrul elastic, aflat la distanța c de linia nașterilor.

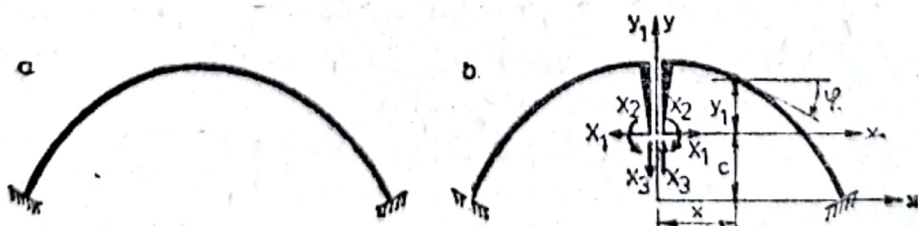


Fig. XI.7

În această situație, deoarece necunoscutele X_1 și X_2 sînt simetrice, iar necunoscuta X_3 este antisimetrică, rezultă $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$. Pentru ca și coeficientul δ_{12} să fie egal cu zero, necunoscutele au fost transferate în centrul elastic, iar poziția sa (distanța c) se obține cu relația

$$c = \frac{\int \frac{I_0}{I} y \, ds}{\int \frac{I_0}{I} \, ds}. \quad (\text{XI.43})$$

Eforturile unitare avînd expresiile

$$\begin{aligned} m_1 &= -y_1, & n_1 &= -\cos \varphi, \\ m_2 &= 1, & n_2 &= 0, \\ m_3 &= x_1, & n_3 &= -\sin \varphi, \end{aligned} \quad (\text{XI.44})$$

coeficienții necunoscutelor și termenii liberi devin:

$$\begin{aligned} EI_0 \delta_{11} &= \int \frac{I_0}{I} y_1^2 \, ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi \, ds, \\ EI_0 \delta_{22} &= \int \frac{I_0}{I} \, ds, \\ EI_0 \delta_{33} &= \int \frac{I_0}{I} x_1^2 \, ds + \int \frac{I_0}{I} \sin^2 \varphi \, ds, \\ EI_0 \Delta_{1p} &= - \int \frac{I_0}{I} y_1 M_p \, ds - \int \frac{I_0}{A} N_p \cos \varphi \, ds, \\ EI_0 \Delta_{2p} &= \int \frac{I_0}{I} M_p \, ds, \\ EI_0 \Delta_{3p} &= \int \frac{I_0}{I} x_1 M_p \, ds + \int \frac{I_0}{A} N_p \sin \varphi \, ds. \end{aligned} \quad (\text{XI.45})$$

Admițind și în acest caz aproximațiile adoptate la arcul dublu articulat, precum și

$$\int \frac{I_0}{A} \sin^2 \varphi \, ds = 0 \text{ și } \int \frac{I_0}{A} N_p \sin \varphi \, ds = 0,$$

expresiile necunoscutele sînt:

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} y_1 M_p \, ds}{\int \frac{I_0}{I} y_1^2 \, ds + li_0^2}, \quad X_2 = - \frac{\int \frac{I_0}{I} M_p \, ds}{\int \frac{I_0}{I} \, ds},$$

$$X_3 = - \frac{\int \frac{I_0}{I} x_1 M_p \, ds}{\int \frac{I_0}{I} x_1^2 \, ds}. \quad (\text{XI.46})$$

Eforturile finale se determină prin suprapunere de efecte:

$$M = M_p - y_1 X_1 + X_2 + x_1 X_3, \quad (\text{XI.47})$$

$$N = N_p - X_1 \cos \varphi - X_3 \sin \varphi.$$

Dacă încărcarea este simetrică $X_3 = 0$, iar dacă încărcarea este antisimetrică $X_1 = X_2 = 0$.

În cazul rezolvării prin bolțari, relațiile de calcul au următoarele expresii:

$$c = \frac{\Sigma y \Delta w}{\Sigma \Delta w}, \quad X_1 = \frac{\Sigma y_1 M_p \Delta w}{\Sigma y_1^2 \Delta w},$$

$$X_2 = - \frac{\Sigma M_p \Delta w}{\Sigma \Delta w}, \quad X_3 = - \frac{\Sigma x_1 M_p \Delta w}{\Sigma x_1^2 \Delta w}. \quad (\text{XI.48})$$

Încărcarea cu variație de temperatură. Dacă arcul este supus unei variații uniforme de temperatură ($t_m \neq 0$ și $\Delta t = 0$), atunci $X_2 = X_3 = 0$. Expresia necunoscutei X_1 se scrie

$$X_1 = EI_0 \frac{\alpha t_m l}{\int \frac{I_0}{I} y_1^2 \, ds + li_0^2}. \quad (\text{XI.49})$$

Dacă $t_m \neq 0$ și $\Delta t \neq 0$ atunci, pentru arcul simetric $X_3 = 0$ și expresiile necunoscutele devin:

$$X_1 = EI_0 \frac{\int \frac{\Delta t}{h} y_1 ds + t_m l}{\int \frac{I_0}{I} y_1^2 ds + li_0^2}, \quad X_2 = -EI_0 \alpha \frac{\int \frac{\Delta t}{h} ds}{\int \frac{I_0}{I} ds}. \quad (\text{XI.50})$$

Încărcarea cu cedări de reazeme. Termenii liberi se obțin cu expresia cunoscută

$$\Delta_{i\Delta} = - \sum r_{kt} \Delta_k. \quad (\text{XI.51})$$

APLICAȚII

Problema 11.18. Să se traseze diagramele de moment încovoitor și de forță tăietoare la arcul dublu articulat din figura 11.18. Arcul este parabolic, se realizează din beton armat și are secțiunea constantă ($b = 30$ cm, $h = 60$ cm).

Alegînd sistemul de bază arcul simplu rezemat, necunoscuta X_1 reprezintă împingerea arcului dublu articulat și are expresia

$$X_1 = H = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + li_0^2}.$$

Secțiunea este constantă, deci $I_0 = I$.

Caracteristicile secțiunii sînt: $A = 0,30$ m², $I = 0,90 \cdot 10^{-2}$ m⁴, $i^2 = 0,030$ m².

Arcul fiind pleoștit, termenii din expresia necunoscutei sînt:

$$\int y^2 dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{16f^2 x^2}{l^2} (l-x)^2 dx = \frac{8f^2 l}{15} = 204,8,$$

$$li_0^2 = 24 \cdot 0,030 = 0,72,$$

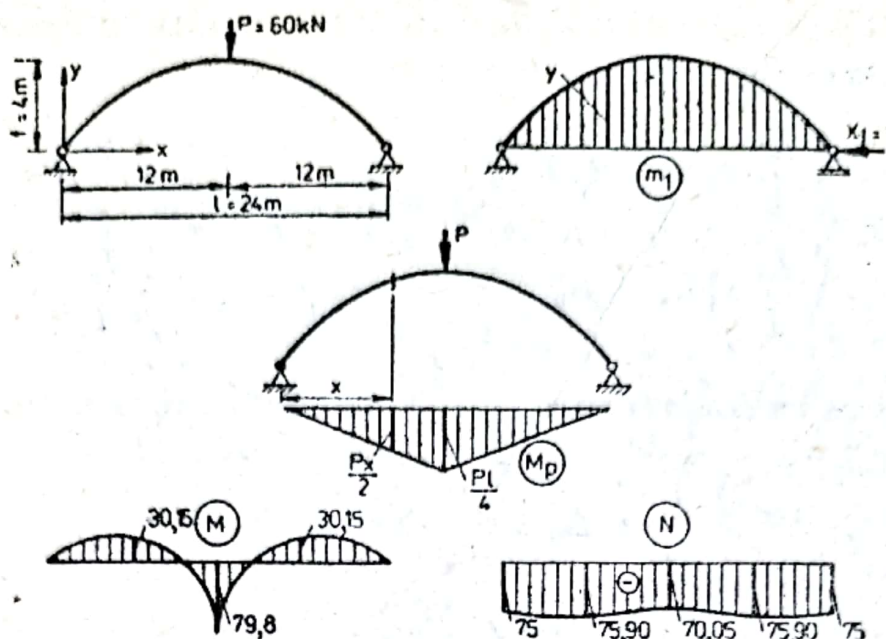


Figura 11.18

$$\int y M_p dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{4fx}{l} (l-x) \frac{Px}{2} dx = \frac{5Pfl^2}{48} = 14400.$$

Cu aceste valori rezultă $X_1 = H = 70,05 \text{ kN}$.

Calculul eforturilor :

— momentul încovoietor la cheie,

$$M_c = \frac{Pl}{4} - Hf = 360 - 4 \cdot 70,05 = 79,8 \text{ kNm},$$

— momentul încovoietor la sfertul deschiderii; $y = \frac{3}{4}f$,

$$M_s = \frac{Pl}{8} - \frac{3}{4}Hf = -30,15 \text{ kNm},$$

— forța axială la nașteri $\left(x = 0, \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{2}{3}\right)$,

$$N_n = -V_0 \sin \varphi_n - H \cos \varphi_n; \quad \sin \varphi_n = 0,548, \quad \cos \varphi_n = 0,836,$$

$$N_n = -\frac{P}{2} \cdot 0,548 - H \cdot 0,836 = -75 \text{ kN},$$

— forță axială la cheie ($\varphi_c = 0$),

$$N_c = -H = -70,05 \text{ kN},$$

— forță axială la sfertul deschiderii ($x = 6$, $\text{tg } \varphi_s = \frac{1}{3}$),

$$N_s = -V_0 \sin \varphi_s - H \cos \varphi_s; \quad \sin \varphi_s = 0,314, \quad \cos \varphi_s = 0,949.$$

Diagramele finale au fost reprezentate în figura 11.18.

Problema 11.19. Să se determine împingerea arcului dublu articulat de la aplicația precedentă utilizînd, pentru calculul termenului liber, arcul cu trei articulații. Reacțiunile arcului cu trei articulații sînt: $V_0 = 30 \text{ kN}$, $H_0 = 90 \text{ kN}$, iar momentul încovoietor în secțiunea curentă este $M_p = 30x - 90y$.

Termenul liber are forma

$$\Delta_{1p} = - \int y M_p dx + H_0 l i_0^2,$$

în care:

$$\int y M_p dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{4fx}{l^2} (l-x) \left[30x - 90 \frac{4fx}{l^2} (l-x) \right] dx = -4032,$$

$$H_0 l i_0^2 = 64,8.$$

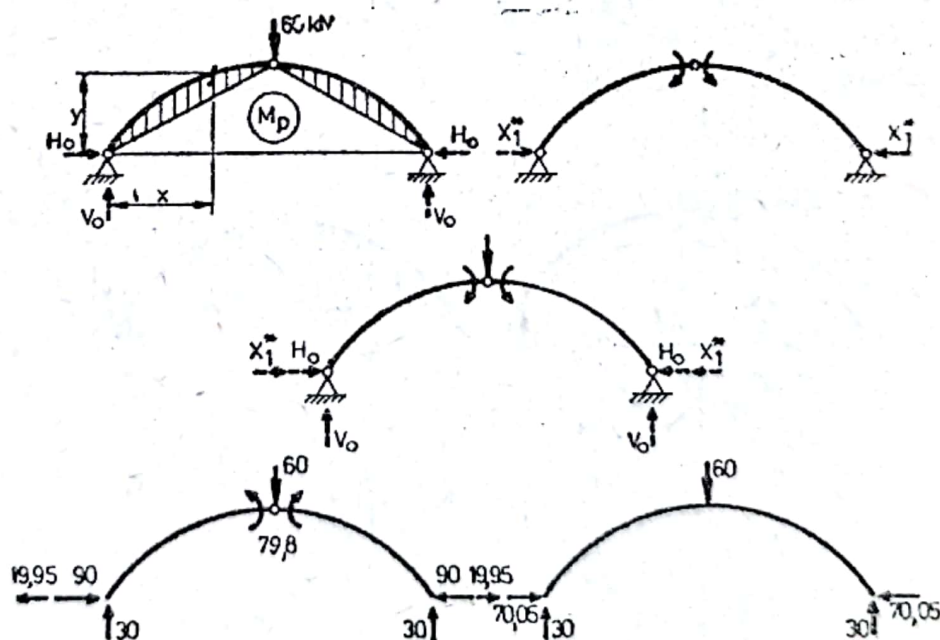


Fig. 11.19

Cu aceste valori termenul liber devine $\Delta_{1p} = 4096,8$, iar necunoscuta X_1^* , conform relației (XI.31), are valoarea

$$X_1^* = H^* = -\frac{4096,8}{205,52} = -19,95 \text{ kN.}$$

Împingerea arcului dublu articulat este

$$H = H_0 + H^* = 90 - 19,95 = 70,05 \text{ kN.}$$

S-a obținut aceeași valoare ca și pentru sistemul de bază arc simplu rezemat. Eforturile vor avea, evident, aceleași valori.

Problema 11.20. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la arcul din figura 11.20. Secțiunea transversală este constantă și are dimensiunile: $b = 40 \text{ cm}$, $h = 60 \text{ cm}$.

Caracteristicile secțiunii transversale sînt: $A = 0,24 \text{ m}^2$, $I = 0,72 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$, $i^2 = 0,030 \text{ m}^2$.

Coeficientul necunoscutei este $\delta_{11} = \int y^2 dx + li^2$, unde:

$$\int y^2 dx = 2 \int_0^{l/2} \left[\frac{4f}{l^2} (lx - x^2) \right]^2 dx = \frac{8f^2 l}{15} = 138,24,$$

$$li^2 = 20 \cdot 0,03 = 0,6$$

și în consecință $\delta_{11} = 138,84$.

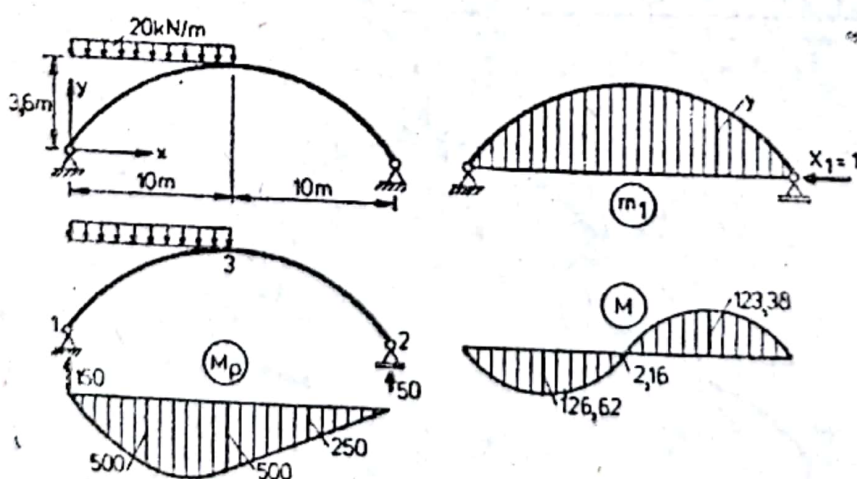


Fig. 11.20

Termenul liber se obține integrând pe intervalele 1–3 și 3–2, deoarece momentul încovoietor M_p are legi de variații diferite pe aceste două intervale.

Intervalul 1–3

$$\left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

$$M_p = 150x - 10x^2,$$

$$-\int y M_p dx = - \int_0^{l/2} \frac{4fx}{l^2} (l-x)(150x - 10x^2) dx = -11700.$$

Intervalul 3–2

$$\left(\frac{l}{2} \leq x \leq l\right)$$

$$M_p = 150x - 200(x - 5),$$

$$-\int y M_p dx = - \int_{l/2}^l \frac{4fx}{l^2} (l-x)[150x - 200(x - 5)] dx = -7500.$$

Termenul liber are valoarea $\Delta_{1p} = -19200$.

Cu acestea necunoscuta $X_1 = H$ rezultă, $X_1 = 138,288$ kN.

Calculul momentelor încovoietoare:

– momentul încovoietor la cheie,

$$M_c = M_p - yH = 500 - 3,6 \cdot 138,288 = 2,16 \text{ kNm}$$

– momentul încovoietor la sfertul deschiderii ($y = 0,75$ f),

$$(1-3) \quad M'_s = 150 \cdot 5 - 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - 0,75 \cdot 3,6 \cdot 138,288 = -126,67 \text{ kNm},$$

$$(3-2) \quad M''_s = 50 \cdot 5 - 0,75 \cdot 3,6 \cdot 138,288 = -123,38 \text{ kNm}.$$

Valorile obținute sînt înscrise în diagrama M .

Considerînd arcul cu trei articulații, ca sistem de bază pentru calculul termenului liber, necunoscuta $H^* = X_1^* = 0,6$ kN și reprezintă diferența între împingerea arcului cu trei articulații H_0 și împingerea arcului cu două articulații H ;

$$H_0 = 138,888 \text{ kN}, \quad H = 138,288 \text{ kN} \quad \text{și} \quad H_0 - H = 0,6 \text{ kN}.$$

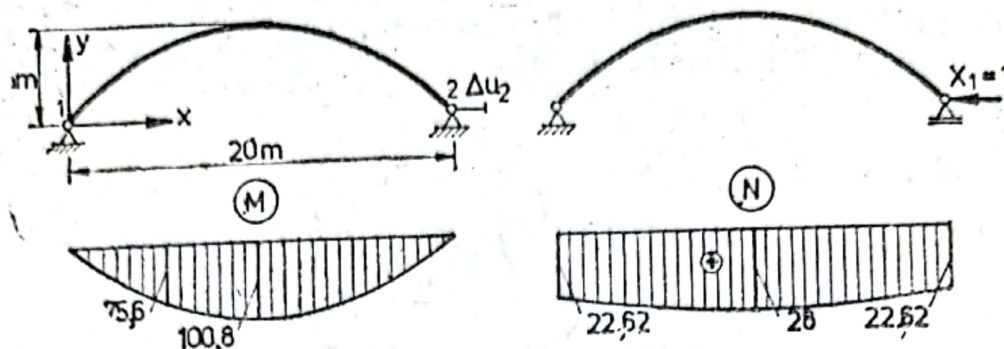


Fig. 11.21

Problema 11.21. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială la arcul parabolic cu secțiune constantă, din figura 11.21, încărcat cu cedarea de reazem $\Delta u_2 = 2$ cm. Se dau: $b = 40$ cm, $h = 60$ cm, $E = 270000$ daN/cm².

Ecuatia de condiție este $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$,
unde:

$$EI\delta_{11} = \int y^2 ds + li^2 = 2 \int_0^{l/2} \frac{16f^2}{l^4} (lx - x^2)^2 dx + li^2,$$

$$i^2 = \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12} = 3 \text{ dm}^2 = 0,030 \text{ m}^2,$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = 72 \text{ dm}^4 = 0,72 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4,$$

$$li^2 = 20 \cdot 0,03 = 0,6,$$

$$EI\delta_{11} = 138,24 + 0,6 = 138,84,$$

$$\Delta_{1\Delta} = -\sum r_{k1}\Delta_k = -(-1 \cdot 0,02) = 0,02.$$

Necunoscuta are valoarea

$$X_1 = -\frac{EI\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = -\frac{0,02 \cdot 27000000 \cdot 72 \cdot 10^{-4}}{138,84} = -28 \text{ kN}.$$

Eforturile se determină cu relațiile:

$$M_{\Delta} = m_1 X_1 = -y X_1, \quad N_{\Delta} = n_1 X_1 = -X_1 \cos \varphi,$$

— Momentul încovoietor la cheie,

$$M_c = 3,6 \cdot 28 = 100,8 \text{ kNm}.$$



- Momentul încovoietor la sferul deschiderii,

$$M_s = \frac{3}{4} \cdot 3,6 \cdot 28 = 75,6 \text{ kNm.}$$

Fibra întinsă este fibra din interior.

- Forța axială la nașteri ($x = 0$, $\cos \varphi_n = 0,808$),

$$N_n = H \cos \varphi_n = 28 \cdot 0,808 = 22,62 \text{ kN.}$$

- Forța axială la sferul deschiderii ($x = 5$, $\cos \varphi_s = 0,940$),

$$N_s = H \cos \varphi_s = 28 \cdot 0,940 = 26,32 \text{ kN.}$$

- Forța axială la cheie ($\cos \varphi_c = 1$),

$$N_c = 28 \text{ kN.}$$

Diagramele de eforturi sînt date în figura 11.21.

Problema 11.22. Pentru arcul de la aplicația precedentă să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială produse de încărcarea cu variația de temperaturi $t_m = +25^\circ$.

Expresia necunoscutei se calculează cu relația (XI.37), în care $\Delta t = 0$ și $I = \text{ct.}$

$$X_1 = H = EI \alpha \frac{lt_m}{\int y^2 ds + li^2}.$$

Numitorul a fost calculat anterior; $EI \delta_{11} = 138,84$.

$$EI \alpha l t_m = 27 \cdot 10^6 \cdot 72 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 25 = 972$$

$$X_1 = H = 7,0 \text{ kN.}$$

Calculul eforturilor se efectuează cu relațiile:

$$M_t = m_1 X_1 = -yH, \quad N_t = n_1 X_1 = -H \cos \varphi.$$

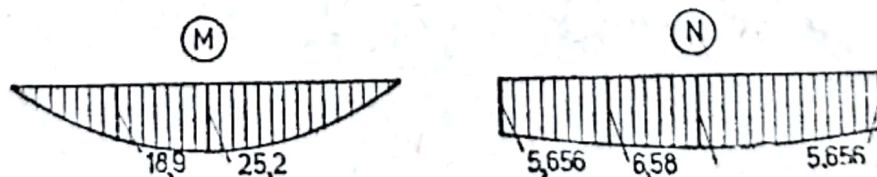


Fig. 11.22

- Momentul încovoietor la cheie,

$$M_c = -3,6 \cdot 7,0 = -25,2 \text{ kNm.}$$

- Momentul încovoietor la sferul deschiderii $\left(y = \frac{3}{4}f\right)$,

$$M_s = -\frac{3}{4} \cdot 3,6 \cdot 7,0 = -18,9 \text{ kNm.}$$

Fibra întinsă este fibra de la exterior.

- Forța axială la nașteri ($x = 0$, $\cos \varphi_n = 0,808$),

$$N_n = -7,0 \cdot 0,808 = -5,656 \text{ kNm.}$$

- Forța axială la sfertul deschiderii ($x = 5$, $\cos \varphi_s = 0,940$),

$$N_s = -7 \cdot 0,940 = -6,58 \text{ kN.}$$

- Forța axială la cheie ($\cos \varphi_c = 1$).

$$N_c = 7 \text{ kN.}$$

Diagramele de eforturi sînt prezentate în figura 11.22.

Problema 11.23. Pentru arcul parabolic cu tirant, din figura 11.23, să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță axială. Arcul se realizează din beton armat, avînd secțiune constantă ($b = 50 \text{ cm}$, $h = 60 \text{ cm}$, $E_h = 270000 \text{ daN/cm}^2$), iar tirantul se realizează din două profile U_{20} , înglobate în beton ($A_t = 64,4 \text{ cm}^2$).

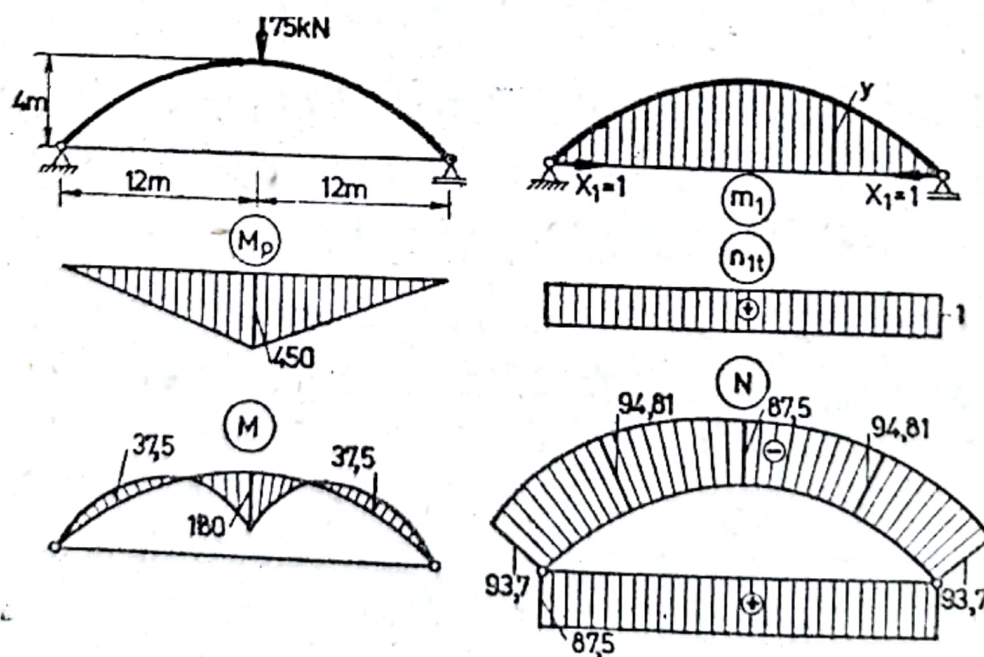


Fig. 11.23

Expresia necunoscută, pentru secțiune constantă, este

$$X_1 = T = \frac{\int y M_p ds}{\int y^2 ds + l(i^2 + i_t^2)}$$

unde $i_t^2 = \frac{E_b I_b}{E_t A_t}$ reprezintă efectul tirantului.

Sistemul de bază se alege arc simplu rezemat, prin secționarea tirantului, iar necunoscuta $X_1 = T$ reprezintă efortul din tirant.

Termenul de la numărător,

$$\int y M_p dx = \frac{5 P f l^2}{48} = 18000.$$

Termenii de la numitor :

$$\int y^2 dx = \frac{8 f^2 l}{15} = 204,8,$$

$$l i^2 = 24 \cdot 0,03 = 0,72,$$

$$l i_t^2 = \frac{27000000 \cdot 90 \cdot 10^{-4}}{210000000 \cdot 64,4 \cdot 10^{-4}} = 0,180.$$

Necunoscuta are valoarea

$$X_1 = \frac{18000}{205,70} = 87,50 \text{ kN}.$$

Calculul eforturilor :

— Momentul încovoietor la cheie,

$$M_c = 450 - 4 \cdot 87,50 = 180 \text{ kNm}.$$

— Momentul încovoietor la sfera deschiderii $\left(y = \frac{3}{4} f\right)$,

$$M_s = 225 - \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 87,5 = 37,5 \text{ kNm}.$$

— Forța axială la nașteri ($x = 0$, $\cos \varphi_n = 0,836$, $\sin \varphi_n = 0,548$),

$$N_n = -37,5 \cdot 0,548 - 87,5 \cdot 0,836 = -93,70 \text{ kN}.$$

— Forța axială la sferul deschiderii ($x = 6$, $\cos \varphi_s = 0,949$, $\sin \varphi_s = 0,314$),

$$N_s = -37,5 \cdot 0,314 - 87,5 \cdot 0,949 = -94,81 \text{ kN.}$$

— Forța axială la cheie,

$$N_e = 87,5 \text{ kN.}$$

La arcul cu tirant, în diagrama de forță axială trebuie reprezentat și efortul de întindere din tirant.

Problema 11.24. Să se calculeze momentele încovoietoare și forțele axiale la arcul cu tirant din figura 11.24. Arcul este în formă de arc de cerc avînd: raza $R = 22,62 \text{ m}$, deschiderea $l = 30,25 \text{ m}$ și săgeata $f = 5,80 \text{ m}$. Secțiunea este constantă cu dimensiunile: $b = 40 \text{ cm}$ și $h = 70 \text{ cm}$. Tirantul este alcătuit din două profile U26 înglobate în beton avînd în final secțiunea de $35 \times 35 \text{ cm}^2$. Pentru susținerea tirantului s-au prevăzut montanți din beton armat de $15 \times 35 \text{ cm}^2$. $E_b = 270000 \text{ daN/cm}^2$, $E_t = 2100000 \text{ daN/cm}^2$.

Eforturile se vor calcula pentru următoarele ipoteze de încărcare:

1. Forța uniform distribuită pe toată deschiderea,

$$p = 6 \text{ kN/m.}$$

2. Forțe concentrate simetrice de 20 kN , aplicate în dreptul tiranților.

Calculul se va efectua operînd prin boltări. Expresia efortului din tirant, pentru sistem de bază arc simplu rezemat, este

$$X_1 = T = \frac{\sum y M_p \Delta s}{\sum y^2 \Delta s + l(i^2 + i_i^2)}.$$

Dacă boltării se aleg egali, $\Delta s = \text{ct.}$, se obține

$$X_1 = T = \frac{\sum y M_p}{\sum y^2 + \frac{l}{\Delta s} (i^2 + i_i^2)}.$$

Termenii $\sum y M_p$ și $\sum y^2$ urmează să fie calculați ulterior. Ceilalți termeni sînt:

$$i^2 = \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12} = 0,0408 \text{ m}^2,$$

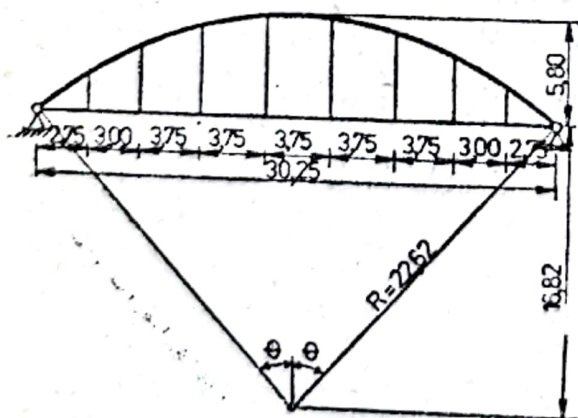


Fig. 11.24

$$i_i^2 = \frac{E_b I_b}{E_t A_t} = \frac{2,7 \cdot 10^6 \cdot 114,33 \cdot 10^{-4}}{2,1 \cdot 10^7 \cdot 96,6 \cdot 15^{-4}} = 0,152 \text{ m}^2,$$

$\Delta s = 2,76 \text{ m}$ (a se vedea calculul elementelor geometrice),

$$\frac{l}{\Delta s} (i^2 + i_i^2) = \frac{30,25}{2,76} (0,0408 + 0,152) = 2,113.$$

Calculul elementelor geometrice se efectuează în tabelul 11.4

Tabelul 11.4

Bolțar	θ_i grade	θ_i rad	$\sin \theta_i$	$\cos \theta_i$	X_i	Y_i	y_i
0	42	0,73	0,6690	0,743	15,125	16,820	0
1	38°30'	0,673	0,6225	0,784	14,100	17,700	0,88
2	31°30'	0,550	0,5225	0,853	11,800	19,300	2,48
3	24°30'	0,427	0,4140	0,910	9,400	20,600	3,78
4	17°30'	0,306	0,3007	0,954	6,800	21,600	4,78
5	10°30'	0,183	0,1820	0,983	4,150	22,200	5,38
6	3°30'	0,061	0,0610	0,998	1,380	22,600	5,78
7	0	0	0	1,000	0	22,620	5,80

Unghiul la centru $\alpha = 2\theta$ este

$$\sin \theta = \frac{l}{2R} = 0,669,$$

de unde $\theta = 42^\circ$ și $\alpha = 84^\circ$.

Lungimea L a arcului de cerc este $L = \frac{\pi R \alpha}{180} = 33,14 \text{ m}$.

Alegînd bolțari de lungime constantă și în număr de 12, rezultă:

$$\Delta s = \frac{n^\circ \pi R}{180} = 2,76 \text{ m, unde } n^\circ = \frac{84^\circ}{12} = 7^\circ.$$

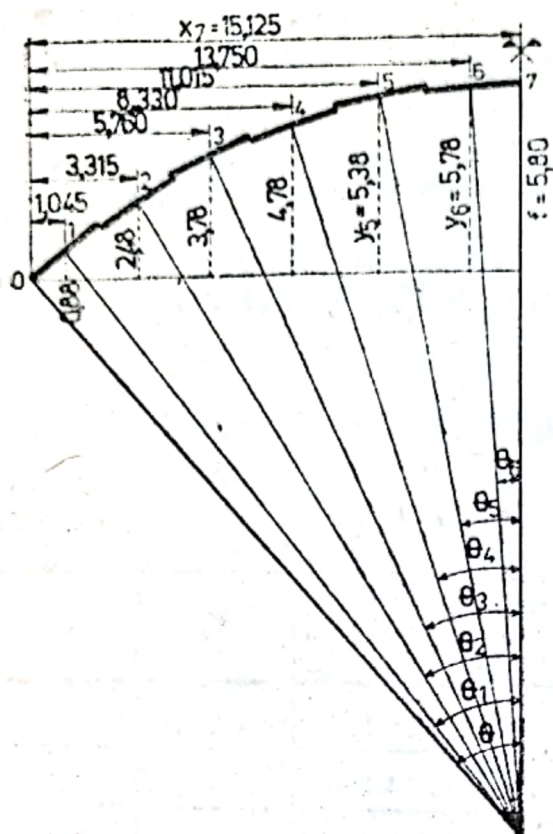


Fig. 11.25

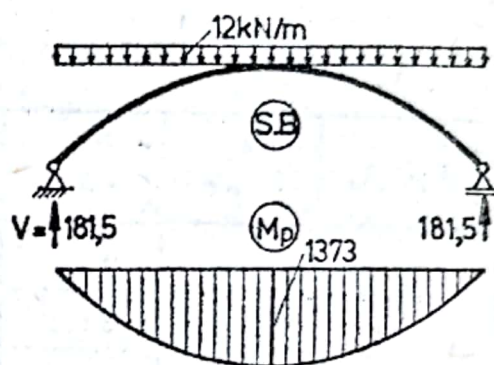


Fig. 11.26

În figura 11.25 s-au indicat bolțarii, distanțele centrelor lor de greutate, măsurate pe orizontală, în raport cu reazemul din stînga, x_i și pe verticală, în raport cu linia reazemelor, y_i , precum și unghiurile dintre raza ce unește fiecare centru de greutate și axa de simetrie.

Pentru bolțarii din dreapta axei de simetrie elementele geometrice vor fi aceleași cu cele calculate pentru bolțarii din stînga axei de simetrie.

Coordonatele centrelor de greutate au fost calculate cu relațiile $X_i = R \sin \theta_i$ și $Y_i = R \cos \theta_i$.

1 — Încărcarea uniformă distribuită pe toată deschiderea (fig. 11.26)

Calculul se efectuează numai pe jumătate de arc; rezultatele finale se multiplică cu 2.

Momentele încovoietoare M_p se determină cu relația $M_p = V_1 x - \sum P_i d_i$, unde P_i reprezintă forțele concentrate în centrele de greutate ale bolțarilor, d_i distanțele măsurate pe orizontală între centrele de greutate ale diferiților bolțari, iar x distanța de la reazemul din stînga la centrul de greutate curent.

Termenii ΣyM_p și Σy^2 sînt calculați în tabelul 11.5 și au valorile :

$$2\Sigma yM_p = 65553,76, \quad 2\Sigma y^2 = 280,104.$$

Cu aceste valori se obține necunoscuta X_1 ,

$$X_1 = \frac{65553,76}{280,104 + 2,113} = 232,28 \text{ kN}.$$

Eforturile finale calculate cu relațiile :

$$M = M_p - yX_1, \quad N = N_p - X_1 \cos \varphi,$$

sînt date direct în tabelul 11.5.

Tabelul 11.5

Sec- țiu- nea	y	M_p	yM_p	y^2	yX_1	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	M	N
0	0	0	0	0	0	0,6690	0,743	0	-294,0
1	0,88	189,67	166,91	0,774	204,40	0,6225	0,784	-15,27	-295,08
2	2,48	544,74	1350,95	6,150	576,05	0,5225	0,853	-31,31	-292,96
3	3,78	856,47	3237,46	14,288	878,02	0,4140	0,910	-21,55	-286,52
4	4,78	1116,80	5338,30	22,848	1110,30	0,3007	0,954	6,50	-276,25
5	5,38	1268,11	6822,43	28,944	1249,66	0,1820	0,983	18,45	-261,36
6	5,78	1366,75	7899,81	33,408	1342,58	0,0610	0,998	24,17	-242,88
7	5,80	1372,59	7961,02	33,64	1347,22	0,0	1,000	25,37	-232,28

2 — Încărcarea cu forțe concentrate (fig. 11.27)

Calculul se efectuează pe jumătate din arc. Distanțele pe orizontală între forțele concentrate sînt date în figura 11.27.

Momentele încovoitoare M_p din centrele de greutate ale bolțarilor se determină cu relația $M_p = V_1 x - P_i d_i$.

Termenii ΣyM_p și Σy^2 , din expresia necunoscutei, sînt calculați în tabelul 11.6 și au valorile :

$$2\Sigma yM_p = 30081,948, \quad 2\Sigma y^2 = 280,104.$$

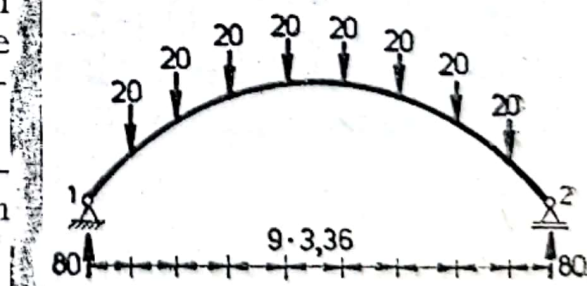


Fig. 11.27

Cu aceste valori rezultă necunoscuta X_1 ,

$$X_1 = \frac{30081,948}{280,104 + 2,113} = 106,591 \text{ kN.}$$

Tabelul 11.6

Sec- țiu- nea	y	M_p	yM_p	y^2	yx_1	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	M	N
0	0	0	0	0	0	0,6690	0,743	0	-132,717
1	0,88	83,60	73,568	0,774	93,80	0,6225	0,784	-10,20	-135,167
2	2,48	253,9	629,672	6,150	264,34	0,5225	0,853	-10,44	-122,270
3	3,78	400,80	1515,024	14,288	402,91	0,4140	0,910	-2,11	-113,550
4	4,78	503,20	2405,296	22,848	509,50	0,3007	0,954	-6,30	-113,715
5	5,38	580,30	3122,114	28,944	573,46	0,1820	0,983	6,84	-108,420
6	5,78	630,00	3641,400	32,408	616,09	0,0610	0,998	13,91	-106,378
7	5,80	630,00	3654,000	33,640	618,22	0,0	1,000	11,78	-106,591

Eforturile finale M și N sînt date direct în tabelul 11.6.

Problema 11.28. Să se calculeze momentele încovoietoare și eforturile axiale la arcul circular din figura 11.28, care susține tablîerul unui pod. Elementele arcului sînt: deschiderea 32 m, săgeata 11 m, secțiunea variabilă cu: $h_c = 40$ cm, $h_n = 70$ cm, $b = 6$ m.

Încărcările provenite din greutatea tablîerului și a stîlpilor de susținere sînt date în schema de încărcări.

Calculul se va efectua prin împărțire în bolțari.

Cunoscînd deschiderea arcului și săgeata, trebuie calculate: raza cercului (R) și unghiul la centru (2α), elemente reprezentate în schema de calcul a arcului, din figura 11.29.

$$R^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2,$$

$$h = R - f,$$

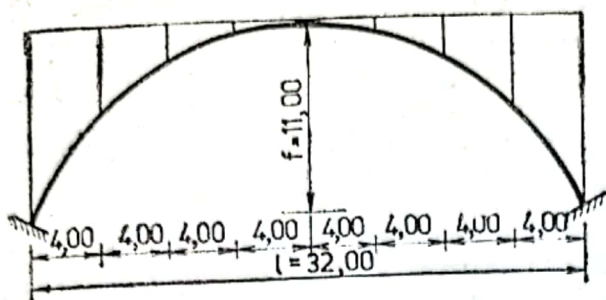


Fig. 11.28

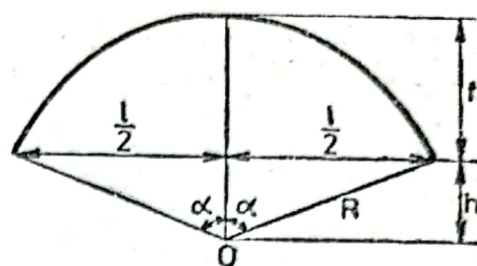


Fig. 11.29

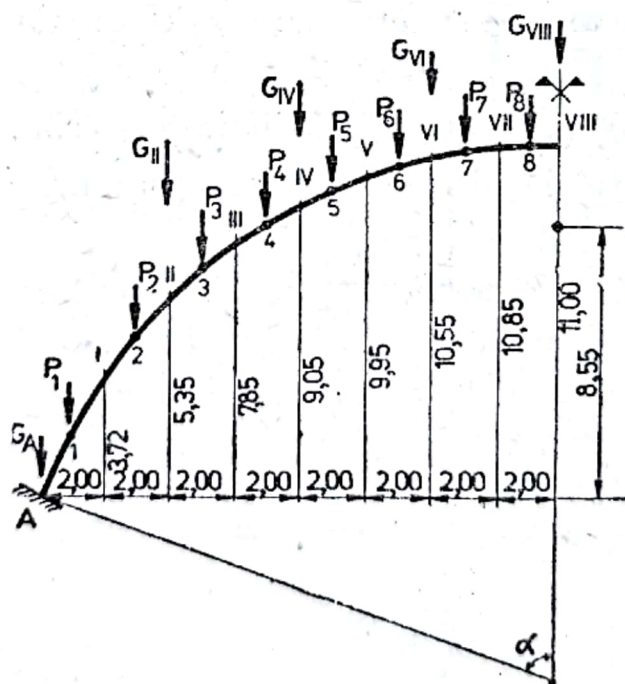
$R^2 = \frac{l^2}{4} + (R - f)^2$, de unde, înlocuind cu valorile cunoscute, se obține:

$$R = 17,13 \text{ m}, \quad h = 17,13 - 11,00 = 6,13 \text{ m},$$

$$\text{iar } \operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{2h} = \frac{l}{2(R - f)} = 2,63 \text{ și } \alpha = 69^\circ.$$

Pentru rezolvare se împarte arcul în bolțari de lungimi variabile, dar cu proiecții pe orizontală egale (2m). Rezultă, pe jumătate de arc, 8 bolțari (fig. 11.30).

Calculul lungimilor bolțarilor și a greutăților proprii:



$$G_A = 674,0 \text{ kN}$$

$$G_{II} = 524,0 \text{ kN}$$

$$G_{IV} = 400,0 \text{ kN}$$

$$G_{VI} = 332,0 \text{ kN}$$

$$G_{VIII} = 160,0 \text{ kN}$$

Fig. 11.30

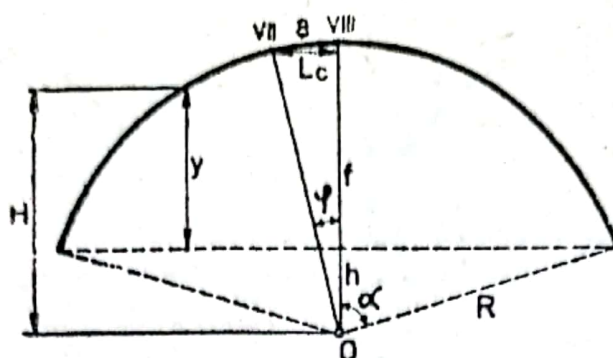


Fig. 11.31

Forțele $P_1, \dots, P_8$ reprezintă greutatea proprii ale bolțarilor și se aplică în centrele de greutate ale acestora.

Forțele $G_A, G_{II}, G_{IV}, G_{VI}, G_{VIII}$ provin din greutatea proprii ale tablierului și stîlpilor de susținere și sînt aplicate chiar în secțiunile dintre bolțari. Forța G_A nu interesează deoarece acționează chiar în încastrare.

Calculul lungimilor bolțarilor și a greutăților proprii se organizează în tabelul 11.7.

În figura 11.31 s-au făcut următoarele notații:

L_c — jumătate din lungimea coardei care unește secțiunile simetrice dintre bolțari.

φ — unghiul format de axa de simetrie cu raza ce unește secțiunea dintre bolțari.

y — distanța de la secțiunea curentă la linia nașterilor.

H — distanța pe verticală de la secțiunea curentă la centrul cercului.

Încărcarea arcului fiind simetrică, prin transferarea necunoscutelor în centrul elastic, necunoscuta antisimetrică este egală cu zero, iar necunoscutele simetrice se determină cu relațiile:

$$X_1 = \frac{\sum y_1 M_p \Delta w}{\sum y_1^2 \Delta w + \sum \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi \Delta s},$$

$$X_2 = - \frac{\sum M_p \Delta w}{\sum \Delta w}.$$

Tabelul 11.7

Secțiunea	L_c	$\frac{L_c}{R}$	φ	$\cos \varphi$	$H = R \cos \varphi$	$y - H = \gamma$	Δs	$^* h_m$	$A = b h_m$	$^{**} P_i = 26,4 \Delta s$
VIII	0	0	0	1	17,13	11,00	2,00	0,42	2,485	129,5
VII	2	0,117	6°45'	0,993	16,98	10,85	2,04	0,45	2,675	141,5
VI	4	0,233	13°30'	0,972	16,68	10,55	2,10	0,48	2,856	156,0
V	6	0,350	20°30'	0,936	16,08	9,95	2,18	0,50	3,024	171,0
IV	8	0,467	27°30'	0,884	15,18	9,05	2,36	0,54	3,220	197,5
III	10	0,582	35°40'	0,812	13,98	7,85	2,75	0,57	3,432	245,0
II	12	0,695	44°	0,719	12,48	6,35	3,25	0,61	3,665	310,0
I	14	0,815	54°30'	0,580	9,85	3,72	4,25	0,67	4,015	443,0
A	16	0,933	69°	0,358	6,13	0				

$$^* h_m = \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1})$$

$$^{**} \gamma_{\text{beton}} = 2600 \text{ daN/m}^3.$$

Poziția centrului elastic (c) se calculează în tabelul 11.8.

Tabelul 11.8

Secțiunea	Δs	A	I	$\frac{I_0^*}{I}$	Δw	y	$y\Delta w$	$y_1 = y - c$
8	2,00	2,485	0,035	1,000	2,000	10,92	21,85	2,37
7	2,04	2,675	0,044	0,796	1,624	10,70	17,38	2,15
6	2,10	2,856	0,053	0,662	1,375	10,25	14,09	1,70
5	2,18	3,024	0,064	0,548	1,170	9,50	11,11	0,95
4	2,36	3,220	0,077	0,456	1,075	8,45	9,08	-0,10
3	2,50	3,432	0,094	0,372	1,020	7,10	7,24	-1,45
2	3,25	3,665	0,114	0,307	0,996	5,04	5,02	-3,51
1	4,25	4,015	0,150	0,233	0,990	1,86	1,84	-6,69

* I_0 = momentul de inerție minim

y este ordonata centrului de greutate^{*} a bolțarului.

Poziția centrului elastic,

$$c = \frac{\sum y\Delta w}{\sum \Delta w} = \frac{87,61}{10,25} = 8,55 \text{ m.}$$

Calculul termenilor de la numitorii expresiilor necunoscuteleor (deplasările unitare) se prezintă în tabelul 11.9.

Tabelul 11.9

Secțiunea	Δw	y_1	$y_1\Delta w$	$y_1^2\Delta w$	$\frac{I_0}{A} \Delta s$	$\cos^2\varphi$	$\frac{I_0}{A} \cos^2\varphi \Delta s$
8	2,000	2,375	4,750	11,260	0,0280	0,988	0,0276
7	1,624	2,150	3,500	7,530	0,0267	0,944	0,0252
6	1,375	1,700	2,340	3,980	0,0256	0,176	0,0244
5	1,170	0,950	1,110	1,055	0,0246	0,781	0,0192
4	1,075	-0,10	-0,107	0,010	0,0255	0,688	0,0176
3	1,020	-1,45	-1,480	2,140	0,0280	0,518	0,0145
2	0,996	-3,51	-3,500	12,250	0,0310	0,328	0,0104
1	0,990	-6,69	-6,630	43,700	0,037	0,128	0,0048

Efectuind însumarea pe coloane, în tabelul 11.9, rezultă:

$$\Sigma y_i^2 \Delta w = 81,925,$$

$$\Sigma \Delta w = 10,25,$$

$$\Sigma \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi \Delta s = 0,143.$$

Calculul momentelor încovoietoare din greutatea proprie, pe sistemul de bază (M_p), se efectuează în tabelul 11.10.

Tabelul 11.10

Sec- țiu- nea	$M_{pi} = M_{p, i-i} + d_i \sum_{j=1}^{i-1} P_j$	ΣP_j	$\sin \varphi$	N_p
8	$-1,0 \cdot 160 = -160,0$	289,5	0,058	-16,79
7	$-160,0 - 2,0 \cdot 289,5 = -739,0$	431,0	0,176	-78,856
6	$-739,0 - 1,0 \cdot 332,0 - 2,0 \cdot 431 = -1933,0$	919,0	0,292	-268,341
5	$-1933,0 - 2,0 \cdot 919 = -3771,0$	1090,0	0,406	-442,54
4	$-3771,0 - 1,0 \cdot 400,0 - 2,0 \cdot 1090 =$ $= -6351,0$	1687,5	0,525	-885,937
3	$-6351 - 2,0 \cdot 1687,5 = -9726,0$	1932,5	0,643	-1242,597
2	$-9726 - 1,0 \cdot 524,0 - 2,0 \cdot 1932,5 =$ $= -14115$	2242,5	0,766	-1717,755
1	$-14115 - 2,0 \cdot 2242,5 = -18600,0$	2685,5	0,875	-2349,812
A	$-18600,0 - 1,0 \cdot 2685,5 = -21285,5$	2685,5	0,933	-2505,571

Calculul elementelor de la numărătorii necunoscutele X_1 și X_2 se efectuează în tabelul 11.11.

Tabelul 11.11

Sec- țiu- nea	Δw	$y_1 \Delta w$	M_p	$M_p \Delta w$	$y_1 M_p \Delta w$
8	2,000	4,750	-160	-320	-760
7	1,624	3,500	-739	-1200,136	-2586,5
6	1,375	2,340	-1933	-2657,875	-4523,22
5	1,170	1,110	-3771	-4412,070	-4185,81
4	1,075	-0,107	-6351	-6827,325	679,657
3	1,020	-1,480	-9726	-9920,520	14394,48
2	0,996	-3,500	-14115	-14058,540	49402,50
1	0,990	-6,630	-18600	-18414,0	123318,0

Tabelul 11.12

Sec- tiu- nea	y_1	M_p	$-y_1 X_1$	M	N_p	$\cos \varphi$	$-X_1 \cos \varphi$	N
C	2,45	0	-5246,067	393,978	0	1,000	-2141,252	-2141,252
8	2,375	-160	-5085,473	394,572	-16,79	0,993	-2126,263	-2143,053
7	2,150	-739	-4603,692	297,353	-78,856	0,984	-2106,992	-2185,848
6	1,700	-1933	-3640,128	66,917	-268,348	0,956	-2047,036	-2315,384
5	0,950	-3771	-2034,189	-165,144	-442,540	0,913	-1954,963	-2397,503
4	-0,100	-6531	214,125	-676,830	-885,937	0,851	-1822,205	-2708,142
3	-1,450	-9726	3104,815	-981,14	-1242,597	0,766	-1640,200	-2882,797
2	-3,510	-14115	7515,794	-959,161	-1717,755	0,643	-1376,825	-3094,58
1	-6,690	-18600	14324,976	1365,021	-2349,812	0,484	-1036,366	-3386,178
A	-8,550	-21285	18307,705	2662,25	-2505,571	0,358	-766,568	-3272,140

Efectuind însumarea pe coloane se obține:

$$\Sigma M_p \Delta w = -57810,466, \quad \Sigma y_1 M_p \Delta w = 175739,007.$$

Cu acestea, valorile necunoscutele sînt:

$$X_1 = \frac{175739,007}{81,95 + 0,143} = 2141,25 \text{ kN},$$

$$X_2 = -\frac{-57810,466}{10,25} = 5640,04 \text{ kNm}.$$

Eforturile finale se obțin cu relațiile:

$$M = M_p - y_1 X_1 + X_2,$$

$$N = N_p - X_1 \cos \varphi,$$

iar calculul efectiv se realizează în tabelul 11.12.

METODA DEPLASĂRILOR

Capitolul XII

CALCULUL STRUCTURILOR PRIN REZOLVAREA DIRECTĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Caracteristica esențială a structurilor formate din bare o constituie existența nodurilor — rigide sau articulate.

Poziția deformată și distribuția de eforturi pentru orice bară pot fi determinate dacă se cunosc încărcările exterioare și deplasările nodurilor — rotații și translații. Deoarece încărcările sînt cunoscute, rezultă că este necesar să se determine deplasările secțiunilor de la capetele barelor (deplasările nodurilor), prin calculul structurii în ansamblu. Aceasta este de fapt problema calculului structurilor prin metoda deplasărilor.

Orice secțiune a unei bare are trei posibilități de deplasare în plan — două translații și o rotație — și șase posibilități de deplasare în spațiu — trei translații și trei rotații.

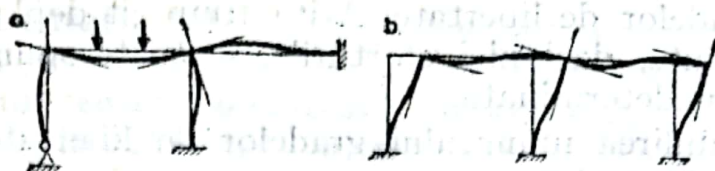
În formularea clasică (specifică rezolvării manuale) se adoptă ipoteza simplificatoare potrivit căreia lungimea unei bare nu se modifică prin trecerea sa din poziția inițială în poziția deformată, ceea ce conduce la reducerea numărului de deplasări distincte ale nodurilor. La această ipoteză se renunță în cadrul formulării matriceale (specifică rezolvării automate), după cum se va vedea în capitolul XIX.

Adoptarea ipotezei simplificatoare enunțate, permite împărțirea structurilor formate din bare în două categorii: *structuri cu noduri fixe* și *structuri cu noduri deplasabile*.

Structurile cu noduri fixe sînt acele structuri la care, sub acțiunea încărcărilor exterioare, nodurile se pot roti, dar nu se pot transla (fig. XII. 1, a).

Structurile cu noduri deplasabile sînt acele structuri la care sub acțiunea încărcărilor exterioare, nodurile se pot roti și transla (fig. XII. 1, b).

Fig. XII.1



Practic se poate stabili că o structură este cu noduri fixe sau cu noduri deplasabile procedînd în modul următor:

— se introduce articulații în toate nodurile rigide și în încastrările cu baza de susținere, obținînd o structură auxiliară formată din bare dublu articulate sau bare articulate la un capăt și simplu rezemate la celălalt (fig. XII. 2, b și d),

— dacă structura auxiliară a devenit invariabilă geometric (este static determinată), atunci structura reală este cu noduri fixe (fig. XII. 2, a).

— dacă structura auxiliară a devenit variabilă geometric (este un mecanism), atunci structura reală este cu noduri deplasabile, avînd un număr de grade de libertate elastică egal cu numărul gradelor de libertate cinematică ale sistemului auxiliar (fig. XII. 2, c).

Trebuie observat că prin deplasarea pe direcția unui grad de libertate elastică, barele structurii se deformează, iar în secțiuni apar eforturi. Prin deplasarea pe direcția unui grad de libertate cinematică, barele mecanismului se deplasează fără a se deforma, deci nu apar eforturi în secțiuni.

Numărul gradelor de libertate cinematică ale sistemului auxiliar plan se determină cu relația

$$w = 3B - 2A - S, \quad (\text{XII.1})$$

unde B reprezintă numărul de bare, A numărul de articulații simple, iar S numărul de reazeme simple.

Dacă $w \leq 0$ structura reală este cu noduri fixe (fig. XII. 2, a), iar dacă $w > 0$ structura reală este cu noduri deplasabile (fig. XII.2, c).

Din analiza efectuată rezultă că parametrii liniar independenți, care definesc din punct de vedere geometric forma deformată a unei structuri, sînt rotațiile nodurilor rigide și translațiile tuturor nodurilor (rigide sau articulate) pe di-

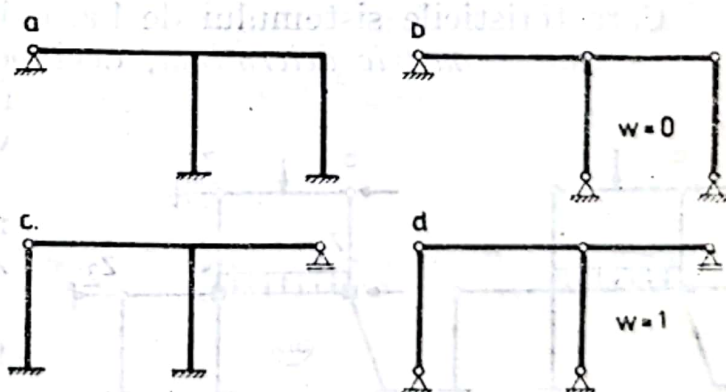


Fig. XII.2

recțiile gradelor de libertate. Atâta timp cât deplasările nodurilor nu sînt cunoscute, deci nici eforturile, se poate spune că structura este geometric nedeterminată.

La stabilirea numărului gradelor de libertate elastică se au în vedere următoarele:

Prezența tiranților nu influențează asupra numărului gradelor de libertate, deoarece alungirile lor nu se pot neglija în calcul. Deci tiranții nu se includ în stabilirea numărului barelor.

Bara curbă, la structurile ce conțin astfel de bare, introduce un grad de libertate în plus, ca urmare a posibilității variației deschiderii ei prin deformare.

Și în metoda deplasărilor calculul se conduce pe un *sistem de bază*, obținut prin blocarea tuturor deplasărilor nodurilor — rotirile nodurilor rigide și translațiile tuturor nodurilor pe direcțiile gradelor de libertate elastică.

Rotirile nodurilor rigide se blochează prin *legături de nod* (blocaje de nod), iar translațiile nodurilor se blochează prin *legături de grad de libertate* (bare dublu articulate). În figura XII. 3, b au fost reprezentate atît legăturile pentru blocarea rotirilor nodurilor, cît și legăturile pentru blocarea translațiilor acestora. Astfel, deplasările nodurilor devin încărcări pentru sistemul de bază.

Legăturile introduse se caracterizează prin:

- sînt legături fictive (imaginate ca fiind posibil de realizat),
- sînt legături simple, blocînd o singură posibilitate de deplasare,
- blocajul de nod suprimă posibilitatea de rotire a nodului, lasă liberă translația sa și are ca echivalent mecanic o reacțiune-moment,
- blocajul de grad de libertate suprimă posibilitățile de translație ale nodurilor, lasă libere rotirile acestora și are ca echivalent mecanic o reacțiune-forță.

Caracteristicile sistemului de bază, în metoda deplasărilor, sînt:

- este *geometric determinat*, deci poate fi rezolvat pentru orice încărcare (forte, deplasări sau variații de temperatură).

— este *unic*, ceea ce permite o foarte bună sistematizare a calculului,

— poate fi format din trei tipuri de bare: *bare dublu încastrate* (între două blocaje de nod sau între un blocaj de

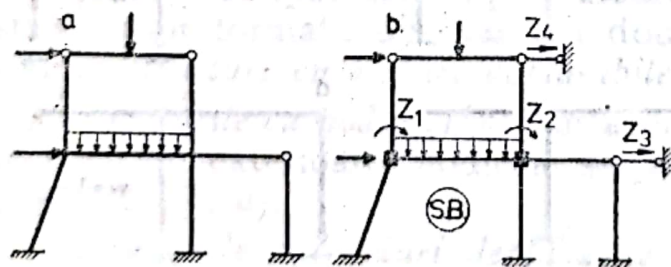


Fig. XII.3

nod și un reazem încastrat), *bare încastrate la un capăt și articulate la celălalt* (între un blocaj de nod și o articulație interioară sau exterioară sau între un reazem încastrat și o articulație interioară) și *bare dublu articulate* avînd rigiditate la încovoiere (cu excepția tiranților care au rigiditatea la încovoiere neglijabilă),

— este multiplu static nedeterminat.

Prin trecerea de la structura reală la sistemul de bază au fost introduse legături suplimentare, în care, pentru orice încărcare, apar reacțiuni.

Ținînd seama de relația forță — deplasare (vezi capitolul IX), reacțiunea din legătura suplimentară se poate exprima astfel:

$$R_i = r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{ii}Z_i + \dots + r_{in}Z_n + R_{ip}, \quad (\text{XII.2})$$

unde:

— $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sînt deplasările necunoscute ale nodurilor structurii. Necunoscuta Z_i va fi numită necunoscută principală; în celelalte, necunoscute secundare,

— r_{ii} este reacțiunea din legătura suplimentară i , cînd sistemul de bază este încărcat numai cu necunoscuta $Z_i = 1$,

— r_{ij} este reacțiunea din legătura suplimentară i , cînd sistemul de bază este încărcat numai cu necunoscuta $Z_j = 1$,

— R_{ip} este reacțiunea din legătura suplimentară i , cînd sistemul de bază este încărcat numai cu forțele exterioare date.

Condiția globală care se impune sistemului de bază este ca acesta, supus acțiunii încărcărilor date și deplasărilor nodurilor, să se comporte la fel cu structura reală. Aceasta revine la a respecta condiția de echilibru static, în absența reacțiunilor din legăturile suplimentare. Rezultă că reacțiunea totală din fiecare legătură suplimentară trebuie să fie egală cu zero. Deci: $R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_n = 0$.

Ținînd seama de relația (XII.2), se obține sistemul ecuațiilor de condiție din metoda deplasărilor:

$$r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{ni}Z_i + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0$$

$$r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{ii}Z_i + \dots + r_{in}Z_n + R_{ip} = 0 \quad (\text{XII.3})$$

$$r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{ni}Z_i + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0$$

sau în formă concentrată

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} Z_j + R_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{XII.4})$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obțin deplasările nodurilor cu care se determină, prin suprapunerea efectelor, momentele încovoietoare în orice secțiune

$$M = M_p + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_n Z_n, \quad (\text{XII.5})$$

unde M_p reprezintă momentul încovoietor din secțiunea curentă a sistemului de bază, produs de forțele exterioare date, iar m_i reprezintă momentul încovoietor din secțiunea curentă a sistemului de bază, produs de încărcarea cu deplasarea $Z_i = 1$.

În cazul încărcării cu variație de temperatură, pe sistemul de bază apar momentele încovoietoare M_t , iar sistemul de ecuații și eforturile finale au forma

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} Z_j + R_{it} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{XII.6})$$

și respectiv

$$M = M_t + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_n Z_n. \quad (\text{XII.7})$$

În cazul cedărilor de reazeme rezultă

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} Z_j + R_{i\Delta} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{XII.8})$$

și respectiv

$$M = M_{\Delta} + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_n Z_n. \quad (\text{XII.9})$$

Verificarea eficientă în această metodă este verificarea condiției de echilibru static a structurii reale sau a părților din structură.

Pentru calculul reacțiunilor din legăturile suplimentare este necesar să se cunoască rezolvarea barelor tip ale sistemului de bază pentru diferite încărcări. Aceste bare fiind static nedeterminate, eforturile din secțiunile de capăt se obțin fie prin metoda forțelor, fie prin metodele energetice. Expresiile acestor eforturi, pentru diferite tipuri de încărcări, sînt date în lucrarea [1] sau în volumul 2 al prezentei lucrări (anexa 3).

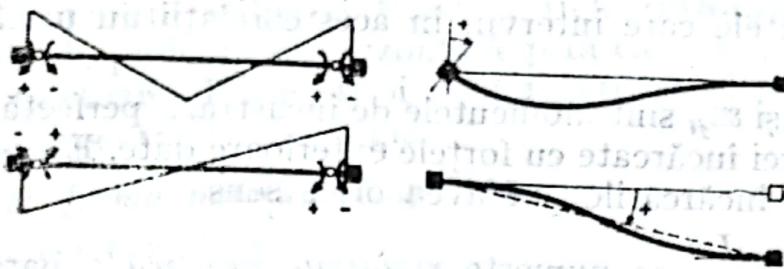


Fig. XII.4

Specificul metodei deplasărilor cere stabilirea unei convenții unitare de semne pentru rotații și momente încovoietoare. Astfel, se consideră pozitive rotațiile și momentele încovoietoare care au sens orar (fig. XII. 4). În această convenție se disting : momentul încovoietor aplicat pe bară și momentul încovoietor aplicat pe nod, ele avînd semne contrare. Ca atare, este necesar să se stabilească cu care dintre aceste momente se operează. Se convine să se lucreze cu momentele încovoietoare aplicate pe noduri.

Dacă se consideră cazul structurilor alcătuite din bare cu secțiune constantă, se pot scrie următoarele relații de calcul a momentelor încovoietoare de la capetele barelor :

1. Bară făcînd parte dintr-o structură cu noduri fixe

— bară dublu încastrată

— bară încastrată — articulată

$$M_{ij} = \pi_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j$$

$$M_{ik} = \pi_{ik} - 3i_{ik}\theta_i$$

$$M_{ji} = \pi_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j$$

(XII.10)

2. Bară făcînd parte dintr-o structură cu noduri deplasabile.

— bară dublu încastrată

— bară încastrată — articulată

$$M_{ij} = \pi_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j + 6i_{ij}\psi_{ij}$$

$$M_{ik} = \pi_{ik} - 3i_{ik}\theta_i + 3i_{ik}\psi_{ik}$$

(XII.11)

$$M_{ji} = \pi_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j + 6i_{ij}\psi_{ij}$$

3. Bară făcînd parte dintr-o structură simetrică și intersectată de axa de simetrie la mijlocul deschiderii

— încărcare simetrică

— încărcare antisimetrică

$$\theta_i = -\theta_j$$

$$\theta_i = \theta_j$$

$$M_{ij} = \pi_{ij} - 2i_{ij}\theta_i$$

$$M_{ij} = \pi_{ij} - 6i_{ij}\theta_i \quad (\text{XII.12})$$

Elementele care intervin în aceste relații au următoarele semnificații:

— M_{ij} și M_{ji} sînt momentele de încastrare perfectă de la capetele i și j ale barei încărcate cu forțele exterioare date. Ele își conțin semnele deoarece încărcările pot avea orice sens.

— $i_{ij} = \frac{I_{ij}}{l_{ij}}$ se numește *rigiditate practică* a barei.

— θ_i și θ_j sînt rotirile secțiunilor i și j de la capetele barei. Ele includ și modulul de elasticitate E .

— ψ_{ij} este rotirea barei. Ea include și modulul de elasticitate E . Pentru alcătuirea sistemului ecuațiilor de condiție trebuie calculați coeficienții necunoscutelor și termenii liberi. Expresiile lor sînt următoarele:

1. **Structuri cu noduri fixe** (fig. XII.5). Se utilizează condiția de echilibru a reacțiunii-moment din blocaj cu momentele încovoietoare din secțiunile de la capetele barelor ce se întîlnesc în nod.

$$r_{jj} = 4 \sum_j i_{ji} + 3 \sum_j i_{jk},$$

$$r_{ji} = 2i_{ji},$$

$$R_{jp} = - \sum_j M_{ji}.$$

(XII.13)

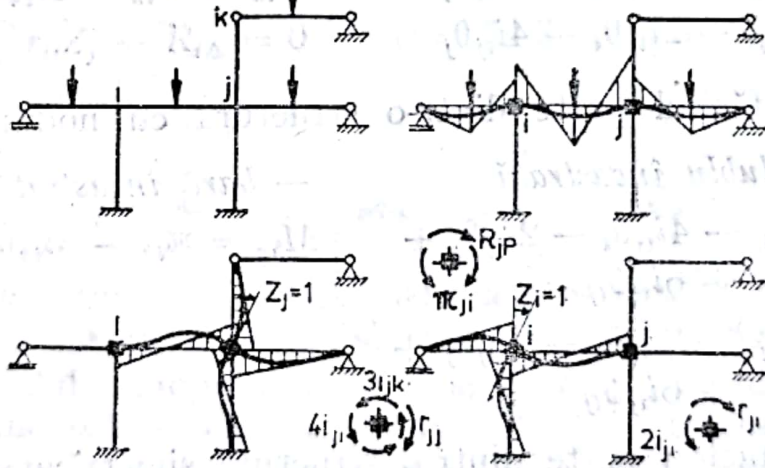


Fig. XII.5

2. **Structuri cu noduri deplasabile.** Reacțiunile din blocajele de nod se determină ca și la cadrele cu noduri fixe. Reacțiunile din legăturile de grad de libertate se determină exprimînd condiția de

echilibru static cu ajutorul principiului lucrului mecanic virtual. La structurile alcătuite din stâlpi verticali și rigle orizontale se poate utiliza și ecuația de proiecții pe orizontală prin care se exprimă echilibrul forțelor tăietoare de pe stâlpi și a reacțiunii din legătura de grad de libertate, pentru fiecare riglă.

Structuri de formă oarecare (fig. XII. 6).

— Pentru ecuația de nod

$$r_{jj} = 4 \sum_i i_{ji} + 3 \sum_k i_{jk},$$

$$r_{ji} = 2i_{ji},$$

$$r_{jh} = -6 \sum_i i_{ji} \psi_{ji}^{(h)} - 3 \sum_k i_{jk} \psi_{jk}^{(h)}, \quad (\text{XII.14})$$

$$R_{jp} = - \sum_j \mathfrak{M}_{ji}$$

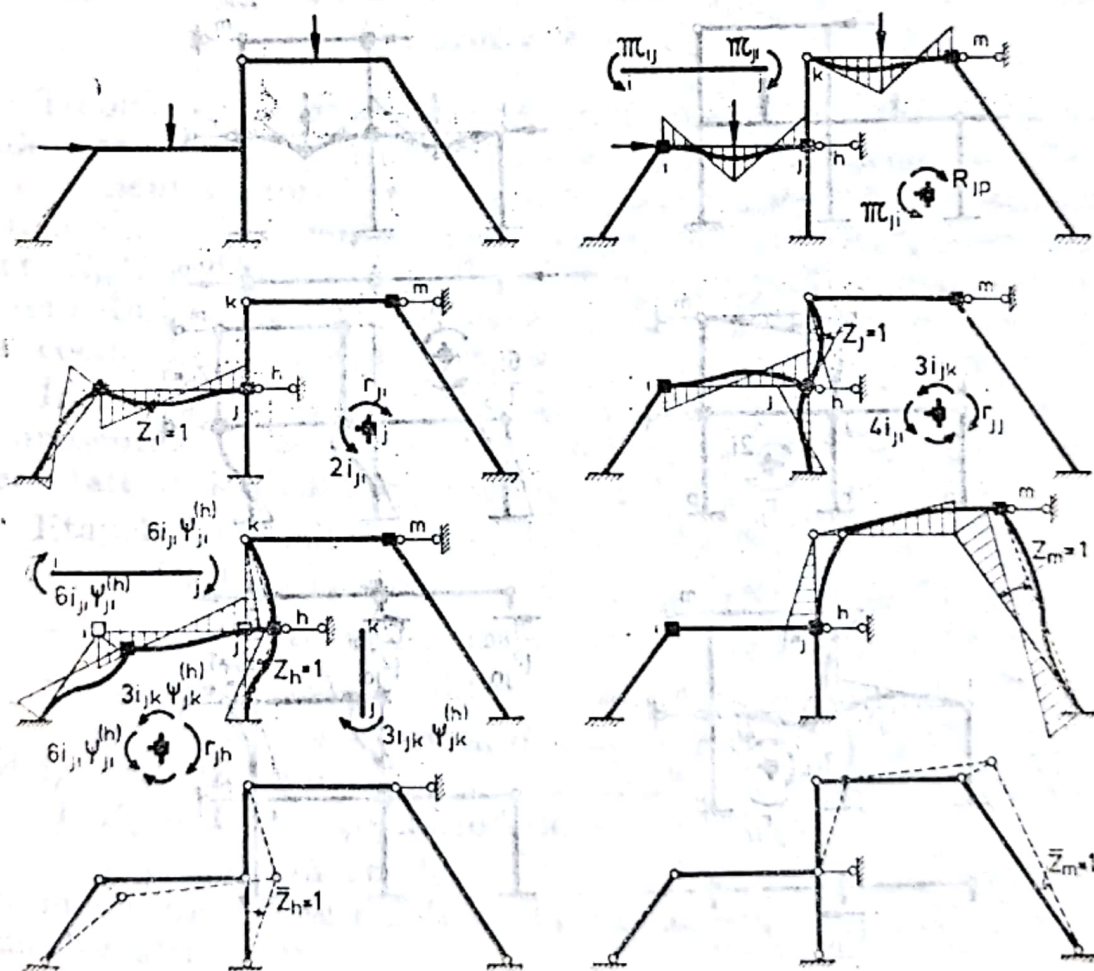


Fig. XII.6

— Pentru ecuația de grad de libertate

$$\begin{aligned} r_{hh} &= 12 \sum i_{jt} [\psi_{ji}^{(h)}]^2 + 3 \sum i_{jk} [\psi_{jh}^{(h)}]^2, \\ r_{hj} &= -6 \sum i_{jt} \psi_{ji}^{(h)} - 3 \sum i_{jk} \psi_{jh}^{(h)}, \end{aligned} \quad (\text{XII.15})$$

$$r_{hm} = 12 \sum i_{jt} \psi_{ji}^{(m)} \psi_{ji}^{(h)} + 3 \sum i_{jk} \psi_{jh}^{(m)} \psi_{jh}^{(h)},$$

$$R_{hp} = - \sum (\mathfrak{M}_{jt} + \mathfrak{M}_{tj}) \psi_{ji}^{(h)} - L_p^{(h)}$$

Aici momentele încovoietoare de încastrare perfectă sînt considerate pe bare. (Atenție la semne).

Structuri etajate (fig. XII.7).

— Pentru ecuația de nod

$$\begin{aligned} r_{jj} &= 4 \sum i_{jt} + 3 \sum i_{jk} \\ r_{jt} &= 2i_{jt} \end{aligned} \quad (\text{XII.16})$$

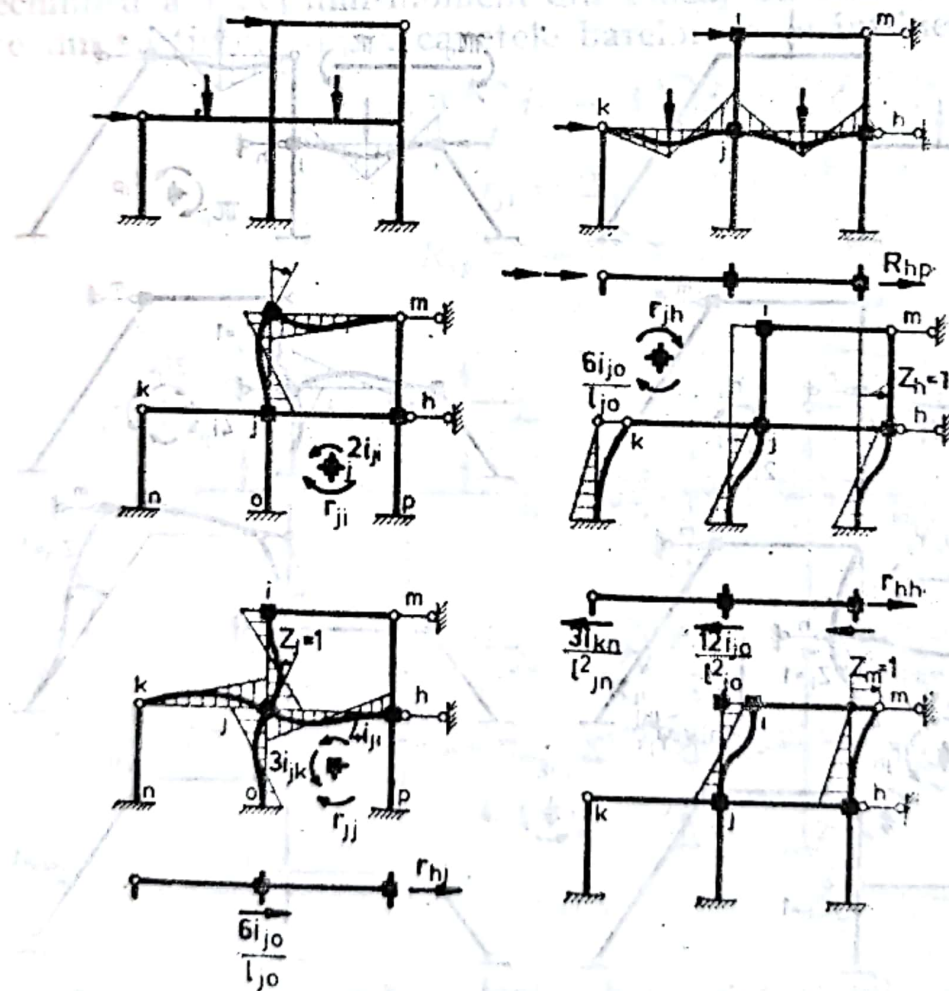


Fig. XII.7

$$r_{jh} = -\frac{6i_{jt}}{l_{jt}} \left(-\frac{3i_{jk}}{l_{jk}} \text{ dacă bara este articulată la extremitatea } k \right)$$

$$R_{jp} = -\sum_j m_{jt}$$

— Pentru ecuația de grad de libertate

$$r_{hh} = 12 \sum \frac{i_{jt}}{l_{jt}^2} + 3 \sum \frac{i_{jk}}{l_{jk}^2} \quad (\text{XII.17})$$

$$r_{hj} = -\frac{6i_{jt}}{l_{jt}} \left(-\frac{3i_{jk}}{l_{jk}} \text{ dacă bara este articulată la extremitatea } k \right)$$

$$r_{hm} = 0$$

$$R_{hp} = -\sum P_h \text{ (suma forțelor orizontale de la nivelul } h \text{ în sus inclusiv } h \text{ —)}$$

Trebuie observat faptul că un coeficient de forma r_{jj} este întotdeauna pozitiv și reprezintă coeficientul necunoscutelor principale, un coeficient de forma r_{ji} poate fi pozitiv, negativ sau egal cu zero și reprezintă coeficientul unei necunoscute secundare, iar termenul liber R_{jp} (R_{jt} , $R_{j\Delta}$) poate fi de asemenea pozitiv, negativ sau egal cu zero. În baza reciprocității reacțiunilor unitare $r_{ij} = r_{ji}$, deci matricea coeficienților necunoscutelor este simetrică.

În cazul structurilor simetrice se folosește fie procedeul grupării necunoscutelor, fie procedeul semistructurilor, cu particularitățile prezentate în legătură cu relațiile (XII.12).

Etapele calculului practic în metoda deplasărilor sînt:

- se trece de la structura reală la sistemul de bază,
- se scrie sistemul ecuațiilor de condiție,
- se calculează rigiditățile practice ale barelor i_{ij} , i_{ik} etc,
- se trasează pe sistemul de bază diagramele unitare m_1 , m_2 etc. și diagrama M_p din încărcarea succesivă a acestuia cu deplasările $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$ etc. și cu forțele exterioare,
- se calculează coeficienții necunoscutelor (reacțiunile unitare) și termenii liberi și se rezolvă sistemul de ecuații, obținînd deplasările nodurilor structurii,
- se trasează diagrama finală M ,
- se verifică condiția de echilibru static al părților sau al structurii în ansamblu.

APLICAȚII

Problema 12.1. Să se traseze diagramele de moment încovoietor și de forță tăietoare la structura din fig. 12.1.

Structura este cu noduri fixe. Introducând articulații în toate nodurile rigide se obține un sistem static determinat, ceea ce se verifică și prin relația $w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 1 = 0$. Alegând $\frac{I}{6} = i_0$, rigiditățile practice ale barelor sînt:

$$i_{12} = \frac{2I}{8} = 1,5i_0, \quad i_{13} = \frac{1,5I}{6} = 1,5i_0, \quad i_{14} = \frac{I}{6} = i_0.$$

Structura prezintă o singură necunoscută (rotirea nodului 1). Prin blocarea nodului se obține sistemul de bază.

Sistemul de bază se încarcă cu rotirea $Z_1 = 1$, obținîndu-se diagrama unitară m_1 și cu forțele exterioare date, obținîndu-se diagrama M_p .

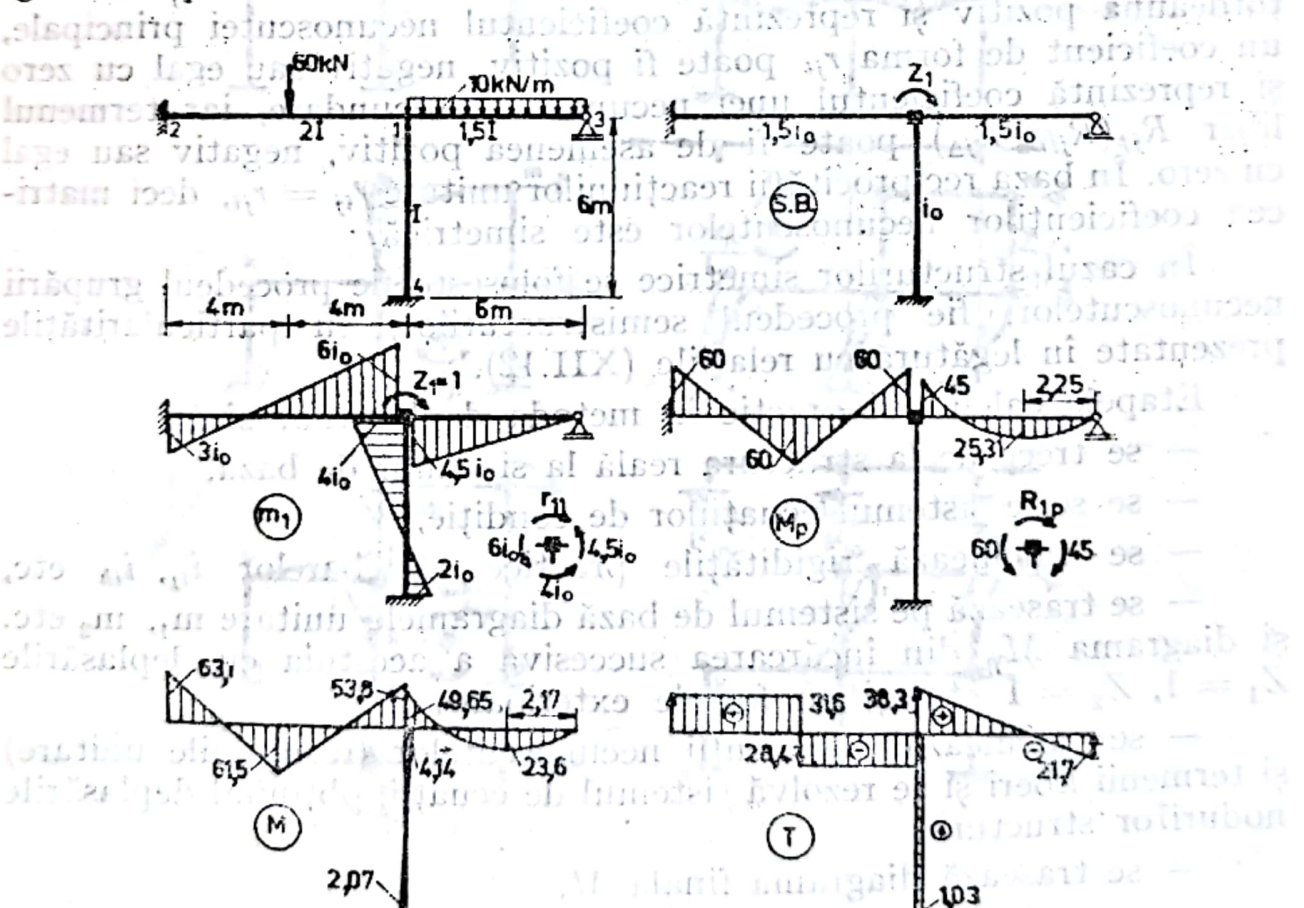


Fig. 12.1

Ecuatia de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0.$$

Calculul reacțiunii r_{11}

Se izolează nodul 1 (diagrama m_1) și se scrie condiția de echilibru,

$$r_{11} - 6i_0 - 4i_0 - 4,5i_0 = 0, \quad r_{11} = 14,5i_0.$$

Calculul reacțiunii R_{1p}

Se izolează nodul 1 (diagrama M_p) și se scrie condiția de echilibru,

$$R_{1p} - 60 + 45 = 0, \quad R_{1p} = 15.$$

Valoarea necunoscută Z_1 este

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{1,035}{i_0}$$

Calculul momentelor încovoietoare finale se face aplicând suprapunerea efectelor determinate anterior,

$$M = M_p + m_1Z_1.$$

Bara 1-2

$$M_{12} = -60 - 6i_0 \left(-\frac{1,035}{i_0} \right) = -53,8 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = 60 - 3i_0 \left(-\frac{1,035}{i_0} \right) = 63,1 \text{ kNm}$$

Bara 1-3

$$M_{13} = 45 - 4,5i_0 \left(-\frac{1,035}{i_0} \right) = 49,65 \text{ kNm}$$

$$M_{31} = 0$$

Bara 1-4

$$M_{14} = -4i_0 \left(-\frac{1,035}{i_0} \right) = 4,14 \text{ kNm}$$

$$M_{41} = -2i_0 \left(-\frac{1,035}{i_0} \right) = 2,07 \text{ kNm.}$$

Se constată că în cazul încărcării cu forțe, eforturile nu depind de rigiditatea practică de comparație (i_0), ci numai de rapoartele rigidităților practice ale barelor. Aceasta permite ca pentru calculul coeficienților necunoscutelor să se considere $i_0 = 1$.

Corectitudinea diagramei de moment încovoietor se verifică utilizând condiția de echilibru static — pentru ansamblul sau pentru părți de structură. În acest caz echilibrul nodului 1 este edificator.

Problema 12.2. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din fig. 12.2.

Structura este cu noduri fixe. Pe sistemul de bază s-au indicat necunoscutele și rigiditățile practice, pentru $\frac{I}{4} = i_0 = 1$.

Ecuatiile de condiție sînt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

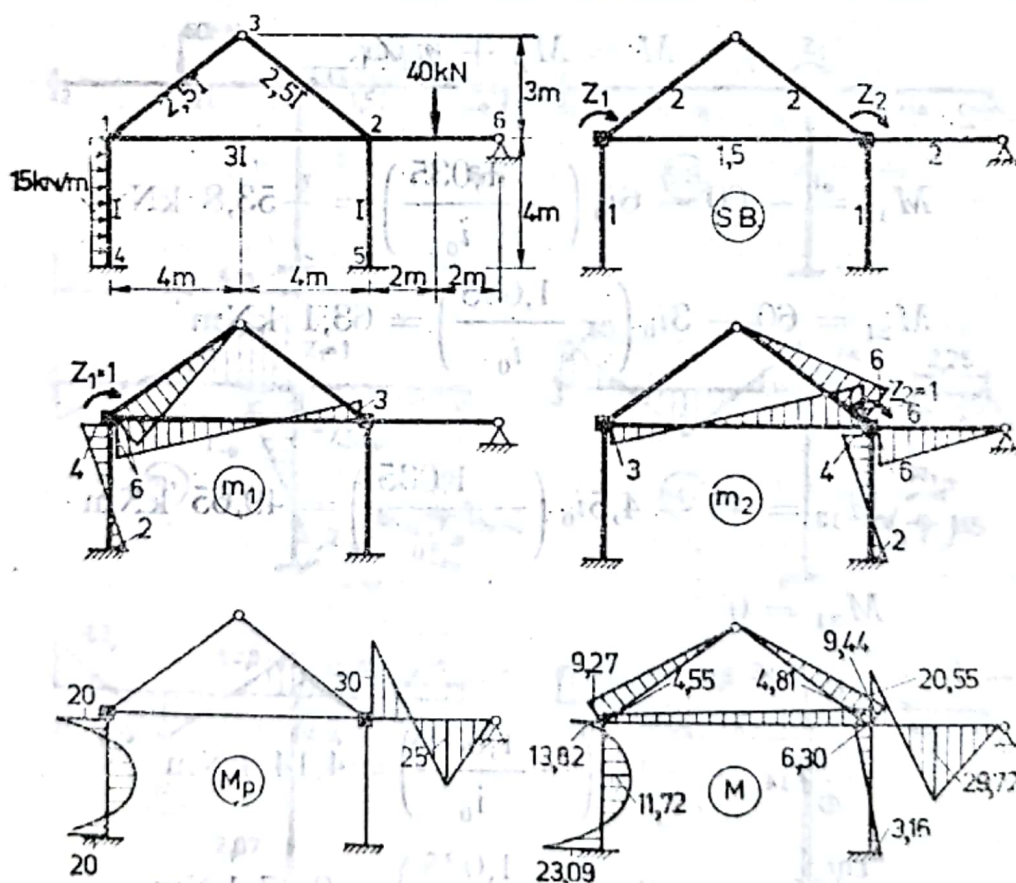


Fig. 12.2

Din diagramele m_1 și m_2 obținute pe sistemul de bază încărcat succesiv cu rotirile $Z_1 = 1$ și $Z_2 = 1$, rezultă reacțiunile unitare, iar din diagrama M_p , termenii liberi:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 16, & r_{12} &= r_{21} = 3, & r_{22} &= 22, \\ R_{1p} &= 20, & R_{2p} &= -30. \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații are forma:

$$\begin{aligned} 16Z_1 + 3Z_2 + 20 &= 0 \\ 3Z_1 + 22Z_2 - 30 &= 0. \end{aligned}$$

În urma rezolvării sistemului de ecuații se obțin valorile necunoscute:

$$Z_1 = -1,545 \text{ și } Z_2 = 1,574.$$

Momentele încovoietoare finale se calculează cu relația

$$M = M_p + m_1 Z_1 + m_2 Z_2.$$

Rezultă:

$$M_{14} = -20 - 4(-1,545) = -13,82 \text{ kNm}$$

$$M_{41} = 20 - 2(-1,545) = 23,09 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = -6(-1,545) - 3 \cdot 1,574 = 4,55 \text{ kNm}$$

$$M_{13} = -6(-1,545) = 9,27 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -6 \cdot 1,574 - 3(-1,545) = -4,81 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = -6 \cdot 1,574 = -9,44 \text{ kNm}$$

$$M_{25} = -4 \cdot 1,574 = -6,30 \text{ kNm}$$

$$M_{52} = -2 \cdot 1,574 = -3,15 \text{ kNm}$$

$$M_{26} = 30 - 6 \cdot 1,574 = 20,55 \text{ kNm}$$

Echilibrul nodurilor este satisfăcut:

$$M_{14} = M_{12} + M_{13} + M_{14} = 4,55 + 9,27 - 13,82 = 0$$

$$\begin{aligned} M_{24} &= M_{21} + M_{23} + M_{25} + M_{26} = -4,81 - 9,44 - 6,30 + \\ &+ 20,55 = 0 \end{aligned}$$

Problema 12.3. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 12.3.

Cadrul este cu noduri deplasabile, avînd gradul de libertate $w = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 - 1 = 1$. Din încărcarea cu deplasarea elastică $Z_2 = 1$ rezultă momente încovoietoare numai pe stîlpi (riglele se transla-

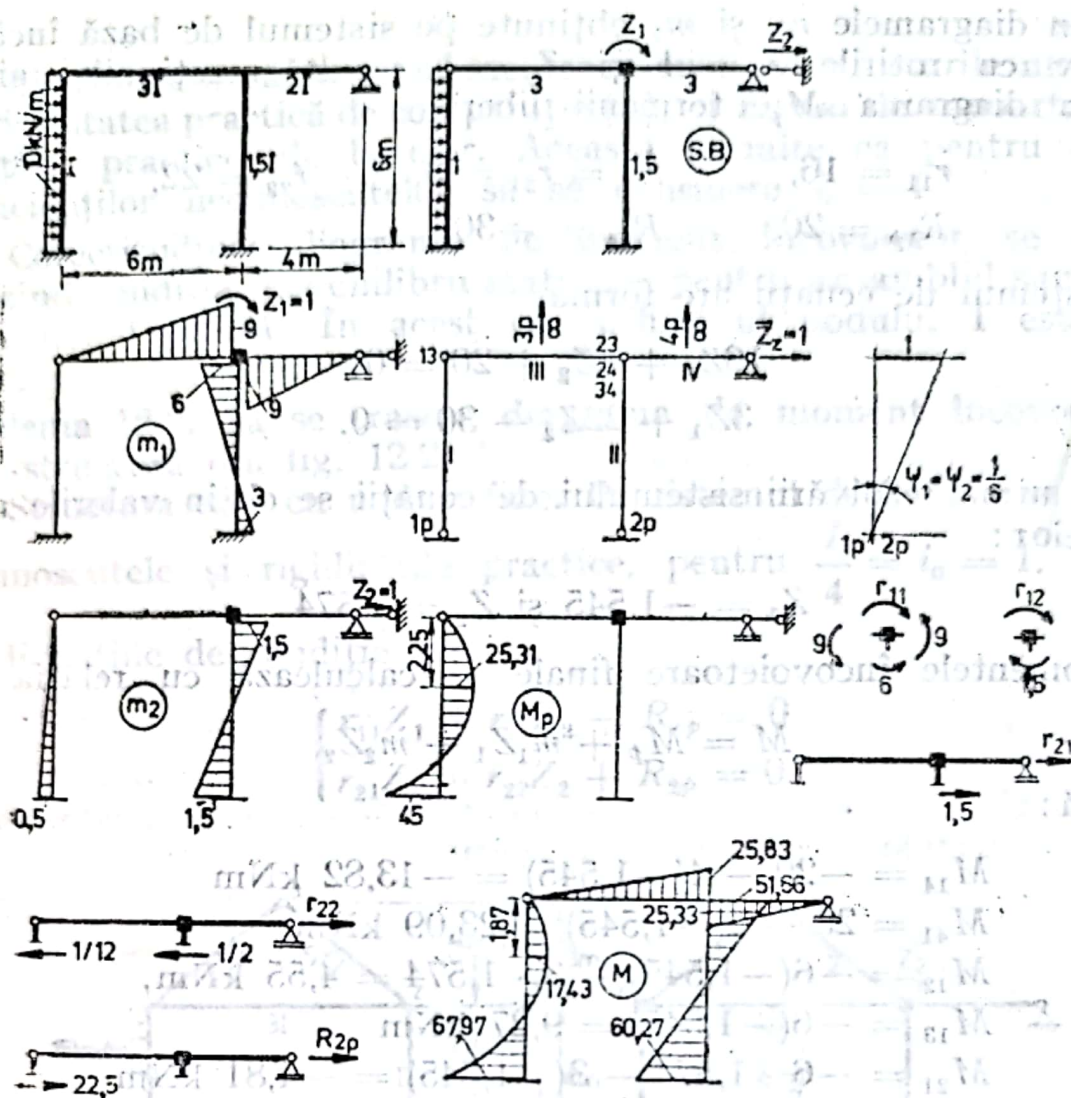


Fig. 12.3

tează). Rigiditățile practice calculate pentru $\frac{I}{6} = i_0 = 1$, sînt înscrise pe sistemul de bază.

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

Se subliniază faptul că reacțiunea care apare într-un blocaj de nod este un moment, iar reacțiunea care apare într-o legătură de grad de libertate este o forță.

Deci reacțiunile r_{11} , r_{12} și R_{1p} se determină din ecuații de echilibru al momentelor încovoietoare din jurul nodului, iar reacțiunile

r_{21} , r_{22} și R_{2p} din ecuații de echilibru al forțelor pe direcția legăturii grad de libertate sau utilizând principiul lucrului mecanic virtual. Rezultă astfel:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 24, & r_{12} &= -1,5, & R_{1p} &= 0, \\ r_{21} &= -1,5, & r_{22} &= 0,583, & R_{2p} &= -22,5 \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații are forma

$$\begin{aligned} 24Z_1 - 1,5Z_2 &= 0 \\ -18Z_1 + 7Z_2 - 270 &= 0. \end{aligned}$$

Necunoscutele au valorile:

$$Z_1 = 2,87 \text{ și } Z_2 = 45,92.$$

Diagrama M este prezentată în figura 12.3.

Problema 12.4. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 12.4.

Riglele fiind articulate de stâlpi, structura are o singură necunoscută și anume, deplasarea pe direcția gradului de libertate. Încărcind sistemul de bază cu deplasarea elastică $Z_1 = 1$, se obține diagrama m_1 . Diagrama $M_p \equiv 0$, deoarece forța exterioară dată este aplicată în nod.

Ecuația de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0,$$

unde $r_{11} = 0,333$ și $R_{1p} = -40$. Cu acestea rezultă $Z_1 = 120$.

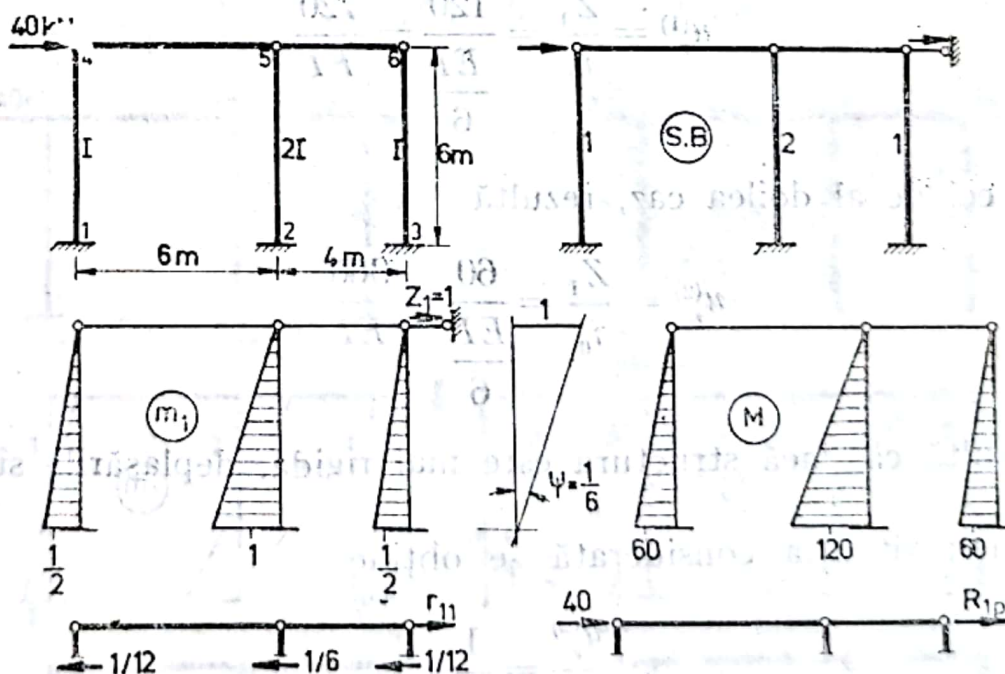


Fig. 12.4

Diagrama finală de moment încovoietor se calculează folosind relația $M = m_1 Z_1$.

Observații. Se constată că momentul forței exterioare în raport cu secțiunea de încastrare a stîlpului, $M = 40 \cdot 6 = 240$ kNm, se distribuie stîlpilor proporțional cu rigiditățile acestora, coeficientul de proporționalitate fiind $\frac{i_s}{\sum i_s}$. Momentele încovoietoare din secțiunile de încastrare sînt:

$$M_1 = \frac{1}{4} \cdot 240 = 60 \text{ kNm}, \quad M_3 = M_1$$

$$M_2 = \frac{2}{4} \cdot 240 = 120 \text{ kNm}.$$

Dacă rigiditățile practice ale stîlpilor se măresc în același raport, de exemplu se dublează, avînd valorile 2, 4 și 2, rezultă $r_{11} = 0,667$ și $Z_1 = 60$. În consecință, momentele încovoietoare pe stîlpi rămîn cu aceleași valori, fapt verificat și astfel:

$$M_1 = \frac{2}{8} \cdot 240 = 60 \text{ kNm}, \quad M_3 = M_1, \quad M_2 = \frac{4}{8} \cdot 240 = 120 \text{ kNm}.$$

În primul caz deplasarea pe orizontală la nivelul riglei este

$$u_r^{(1)} = \frac{Z_1}{i_0} = \frac{120}{\frac{EI}{6}} = \frac{720}{EI}.$$

În cel de al doilea caz, rezultă

$$u_r^{(2)} = \frac{Z_1}{i_0} = \frac{60}{\frac{EI}{6}} = \frac{360}{EI}.$$

Rezultă că dacă structura este mai rigidă, deplasările sînt mai mici.

Pentru situația considerată se obține

$$\frac{u_r^{(2)}}{u_r^{(1)}} = \frac{1}{2},$$

ceea ce înseamnă că cea de a doua structură este de două ori mai rigidă decât prima.

Problema 12.5. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 12.5, a cărei riglă se consideră infinit rigidă.

Riglă fiind infinit rigidă, nodurile nu se pot roti în timpul deformării structurii. Problema are o singură necunoscută, deplasarea pe direcția gradului de libertate.

Din încărcarea cu deplasarea $Z_1 = 1$, se obține diagrama m_1 și apoi reacțiunea $r_{11} = 1,333$. Reacțiunea R_{1p} are valoarea $R_{1p} = -40$.

Ecuația de condiție se scrie

$$1,333Z_1 - 40 = 0$$

și rezultă

$$Z_1 = 30.$$

Diagrama de moment încovoietor este dată direct în figura 12.5.

Se constată că momentul total al forței exterioare se distribuie fiecărui stâlp, proporțional cu rigiditatea sa. Momentele încovoietoare de la capetele stâlpilor sînt egale între ele și egale cu jumătate din momentul încovoietor ce revine fiecărui stâlp. De exemplu,

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{i_1}{\sum i_s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 240 = 30 \text{ kNm etc.}$$

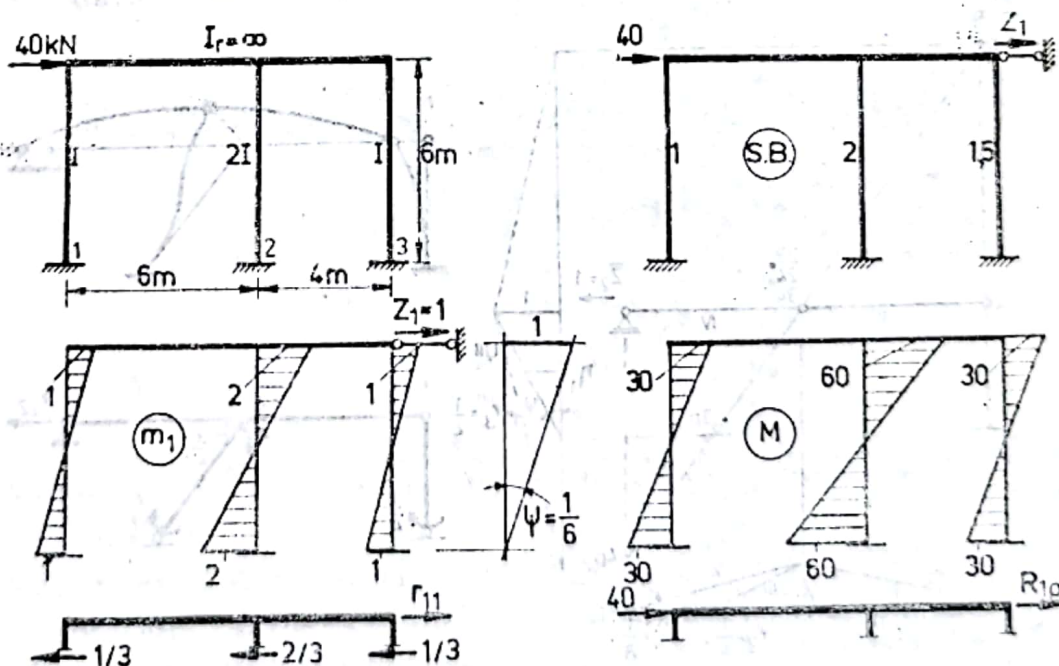


Fig. 12.5

Scanned with OKEN Scanner



corespunzătoare, deplasării elastice pe direcția gradului de libertate ($Z_2 = 1$) comportă stabilirea rotațiilor tuturor barelor. Aceste rotații se determină din diagrama de deplasări a structurii formată din bare articulate, căreia i se impune deplasarea virtuală $\bar{Z}_2 = 1$ (fig. 12.6, g).

Deformata sistemului de bază pentru încărcarea cu $Z_2 = 1$ este prezentată în figura 12.6, h.

Rotirile barelor și translațiile pe direcțiile forțelor sînt:

$$\psi_1 = \psi_3 = \frac{1}{4}, \quad \psi_2 = \psi_4 = \frac{1}{8},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}, \quad \eta_2 = \frac{3}{8}, \quad \eta_3 = \frac{3}{4}.$$

Momentele încovoietoare se determină cu relațiile:

$6i\psi$, pentru barele încastrate la ambele capete,

$3i\psi$, pentru barele încastrate la un capăt și articulate la celălalt.

Pentru $\frac{I}{4} = i_0 = 1$, rigiditățile practice rezultate sînt înscrise pe sistemul de bază.

Momentele încovoietoare pe bare au valorile:

$$\text{— bara 1—3} \quad 3i\psi_2 = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

$$\text{— bara 3—4} \quad 3i\psi_1 = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

$$\text{— bara 1—2} \quad 3i\psi_4 = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

$$\text{— bara 1—5} \quad 6i\psi_3 = 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 3.$$

Valorile astfel calculate au fost înscrise în diagrama unitară m_2 din figura 12.6, d.

Reacțiunile din legătura de grad de libertate se determină utilizînd principiul lucrului mecanic virtual, întrucît scrierea ecuației de proiecție pe orizontală ar necesita, în afara calculului forțelor tăietoare, și calculul forței axiale pe stîlpul înclinat.

Pentru calculul reacțiunii r_{22} se introduc momentele încovoietoare din diagrama m_2 , pe sistemul format din bare articulate și se dă o deplasare compatibilă cu legăturile. Pentru a folosi rezultatele anterioare se utilizează aceeași deplasare virtuală ca și pentru stabilirea formei deformată a sistemului de bază. Condiția de lucru mecanic virtual nul este

$$r_{22} \cdot 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{8} = 0, r_{22} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

În mod asemănător se calculează și celelalte reacțiuni din legătura de grad de libertate:

$$r_{21} \cdot 1 - 6\psi_2 + (8 + 4)\psi_3 + 6\psi_4 = 0, \quad r_{21} = -3,$$

$$R_{2p} \cdot 1 - 15\psi_1 + 20\eta_1 - 45\psi_2 - 40\eta_2 = 0, \quad R_{2p} = \frac{115}{8} = 14,375.$$

Reacțiunile din blocajul nodului sînt:

$$r_{11} = 20, \quad r_{12} = -3, \quad R_{1p} = 45.$$

Sistemul de ecuații se scrie

$$20Z_1 - 3Z_2 + 45 = 0$$

$$-24Z_1 + 15Z_2 + 115 = 0,$$

iar valorile necunoscutele rezultă:

$$Z_1 = -4,474 \text{ și } Z_2 = -14,8.$$

Diagrama finală de moment încovoietor este dată în figura 12.6, f.

Verificare. Încărcînd sistemul format din bare articulate, cu forțele exterioare și momentele încovoietoare finale și dînd deplasarea virtuală $\bar{Z}_2 = 1$, rezultă

$$20 \cdot \frac{1}{2} - 3,90 \cdot \frac{1}{4} - 40 \cdot \frac{3}{8} - 7,15 \cdot \frac{1}{8} + (8,6 + 26,5) \cdot \frac{1}{4} - 15,75 \cdot \frac{1}{8} = 0,09 \approx 0.$$

Problema 12.7. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 12.7.

Structura este simetrică și încărcată simetric. Deși are două grade de libertate, datorită încărcării simetrice, deformată este si-

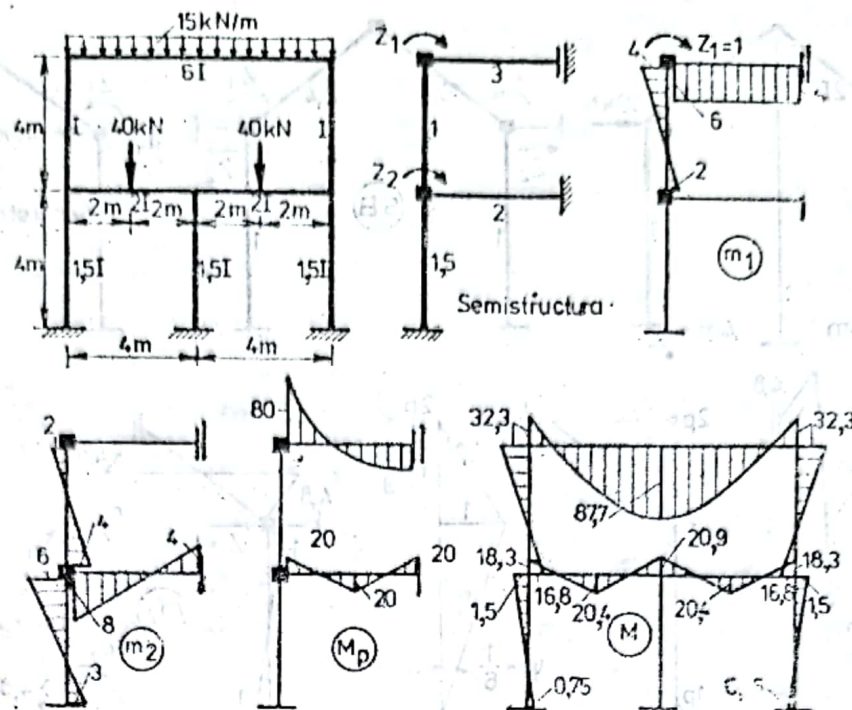


Fig. 12.7

metrică și în consecință structura se comportă ca o structură cu noduri fixe. Calculul se conduce pe semistructură. Rigiditățile practice au fost determinate considerînd $\frac{I}{4} = i_0 = 1$.

Din diagramele m_1 , m_2 și M_p , construite pe sistemul de bază, rezultă:

$$r_{11} = 10, \quad r_{12} = r_{21} = 2, \quad r_{22} = 18, \quad R_{1p} = -80, \quad R_{2p} = -20.$$

Sistemul de ecuații și valorile necunoscutelor sînt:

$$\begin{cases} 10Z_1 + 2Z_2 - 80 = 0 \\ 2Z_1 + 18Z_2 - 20 = 0 \end{cases}$$

$$Z_1 = 7,95, \quad Z_2 = 0,2275.$$

Diagrama finală de moment încovoietor este trasată direct în figura 12.7.

Problema 12.8. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura simetrică din figura 12.8, utilizînd gruparea necunoscutelor.

Structura este simetrică și încărcată simetric. Datorită încărcării simetrice necunoscutele antisimetrice sînt egale cu zero, iar cele

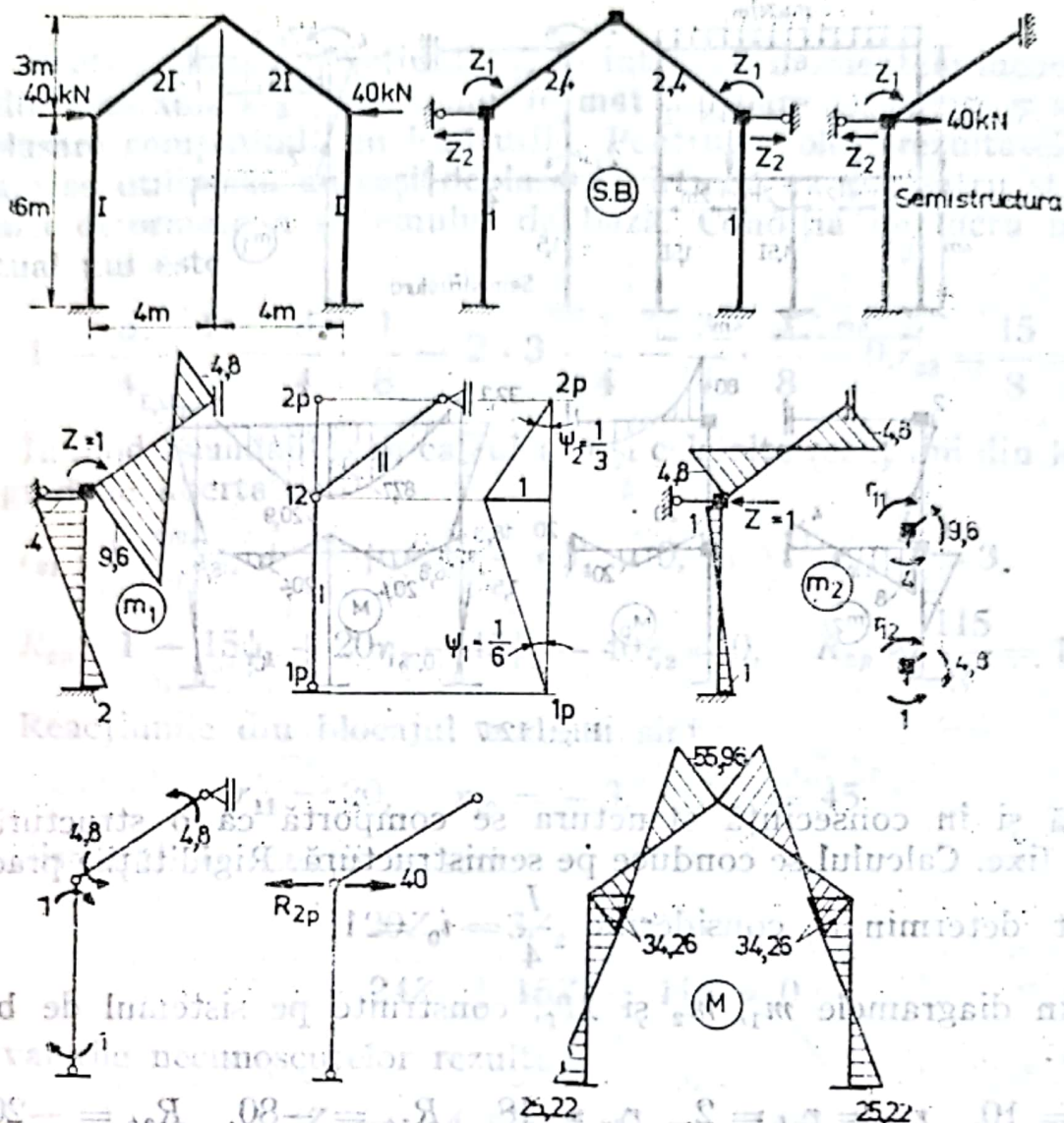


Fig. 12.8

simetrice diferite de zero. Pe sistemul de bază s-au prezentat necunoscutele grupate simetric și rigiditățile practice, pentru $\frac{I}{6} = i_0 = 1$.

Diagramele m_1 și m_2 s-au trasat pe semistructura corespunzătoare încărcărilor simetrice.

Sistemul de ecuații de condiție

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

are coeficienții necunoscutelor și termenii liberi:

$$r_{11} = 13,6 \quad r_{12} = -3,8, \quad R_{1p} = 0$$

$$r_{22} \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} - 9,6 \cdot \frac{1}{3} = 0; \quad r_{22} = 3,533, \quad R_{2p} = 40.$$

Necunoscutele au valorile:

$$Z_1 = -4,52 \text{ și } Z_2 = -16,18.$$

Diagrama M obținută folosind relația

$$M = M_p + m_1 Z_1 + m_2 Z_2,$$

este trasată în figura 12.8.

Problema 12.9. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 12.9.

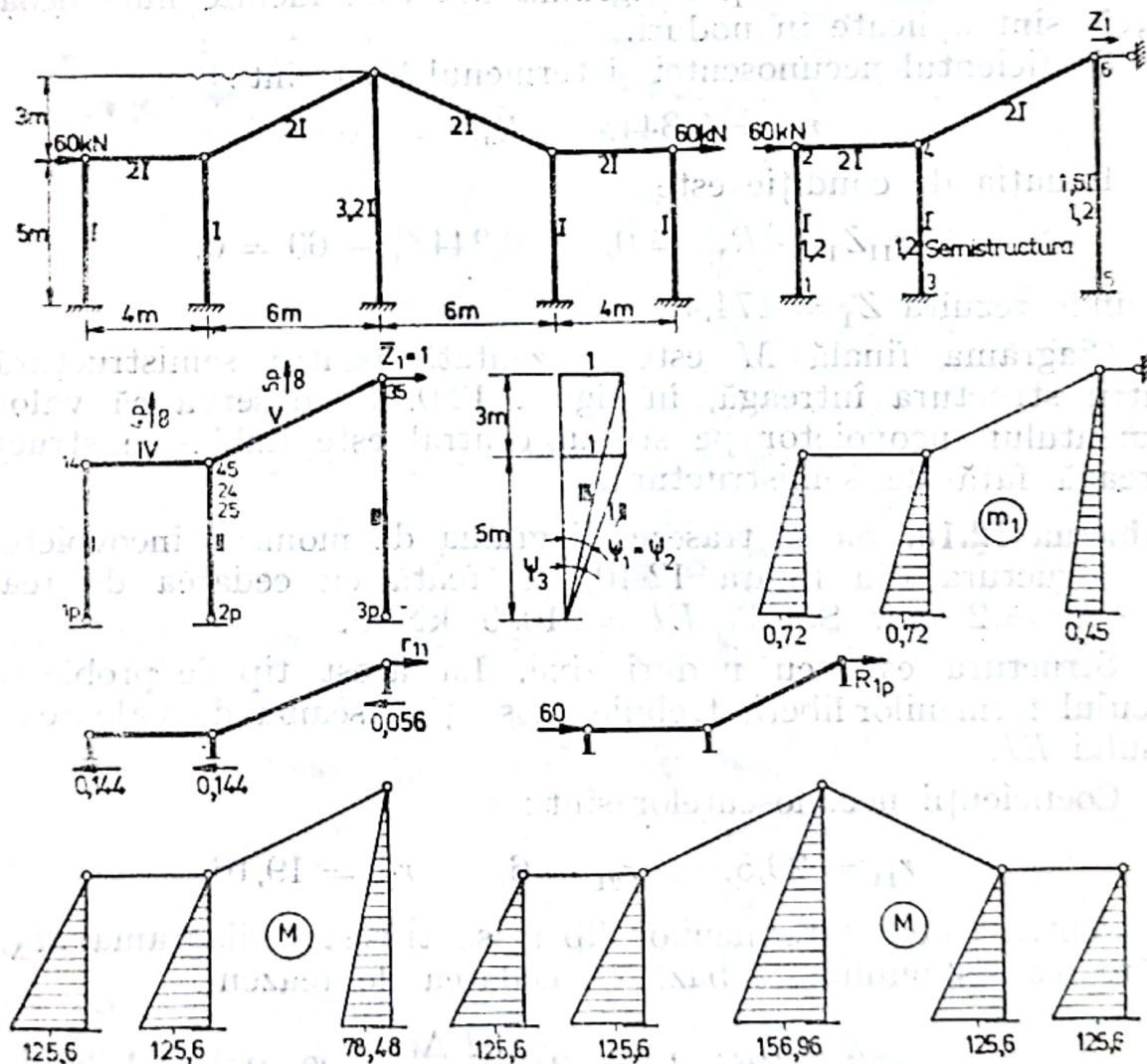


Fig. 12.9

Cadrul este simetric și încărcat antisimetric. Pe structura cores-punzătoare s-au înscris momentele de inerție, rigiditățile practice și s-au figurat necunoscuta Z_1 — deplasarea pe direcția gradului de libertate ($w = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = 1$).

Rigiditățile practice s-au calculat considerînd $i_0 = \frac{I}{6} = 1$.

Pentru trasarea diagramei m_1 s-a construit, pe sistemul format din bare articulate, diagrama de deplasări produsă de deplasarea cinematică $\bar{Z}_1 = 1$. Rotirile riglelor sînt nule, deoarece centrele instantanee absolute $4p$ și $5p$ se află la infinit. Rotirile stîlpilor sînt:

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{5}, \quad \psi_3 = \frac{1}{8}.$$

Cu aceste valori ale rotirilor s-au determinat momentele încovoietoare din diagrama m_1 . Diagrama M_p este identic nulă deoarece forțele sînt aplicate în noduri.

Coeficientul necunoscutei și termenul liber sînt:

$$r_{11} = 0,344, \quad R_{1p} = -60.$$

Ecuția de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0, \quad 0,344Z_1 - 60 = 0,$$

de unde rezultă $Z_1 = 174,4$.

Diagrama finală M este prezentată pentru semistructură și pentru structura întreagă, în figura 12.9. Se observă că valoarea momentului încovoietor pe stîlpul central este dublă pe structura întreagă față de semistructură.

Problema 12.10. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 12.10, încărcată cu cedarea de reazem $\Delta v = 2$ cm. Se dă $EI = 21000$ kNm².

Structura este cu noduri fixe. La acest tip de probleme, în calculul termenilor liberi, trebuie să se țină seama de valoarea produsului EI .

Coeficienții necunoscutelor sînt:

$$r_{11} = 29,5, \quad r_{21} = 6, \quad r_{22} = 19,16.$$

Pentru calculul termenilor liberi se trasează diagrama M_Δ , din încărcarea sistemului de bază cu cedarea de reazem.

$$\pi_{13}^\Delta = 3EI_{13}\psi_{13} = 3E \frac{3I}{4} \frac{\Delta v}{4} = 236,25$$

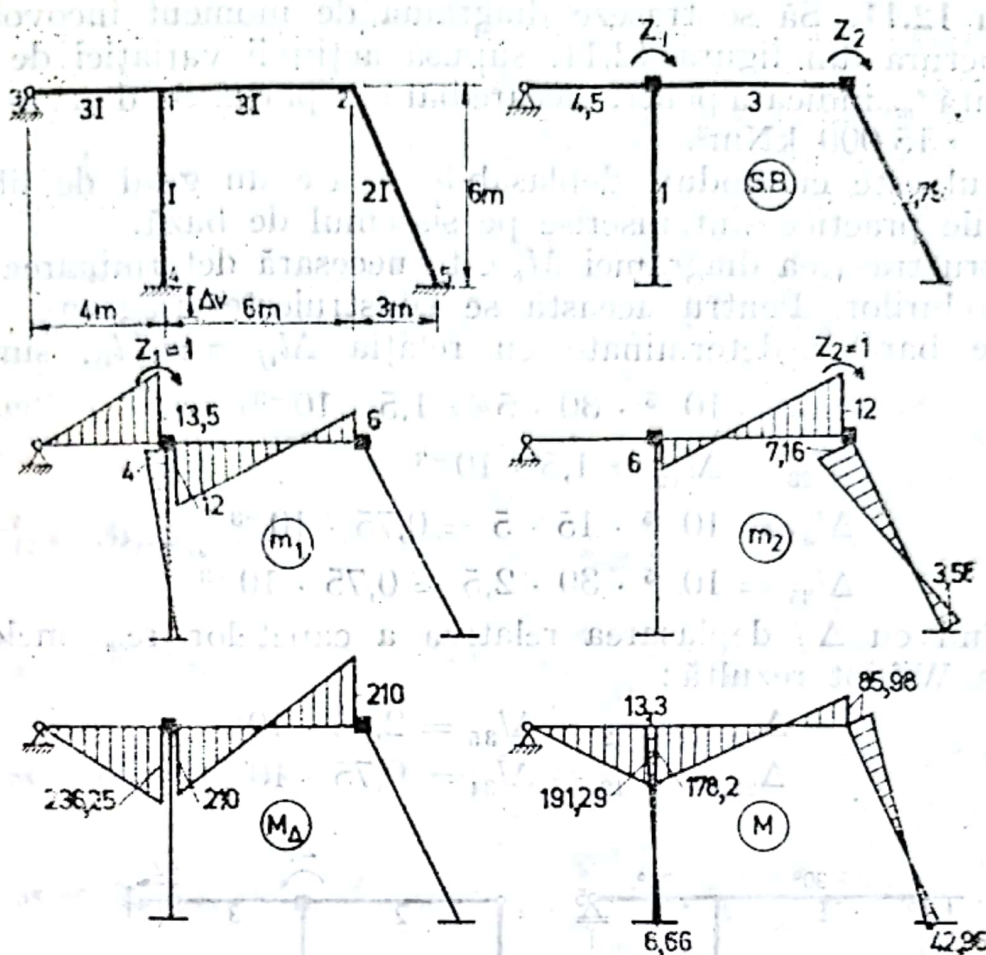


Fig. 12.10

$$\pi_{12}^{\Delta} = \pi_{21}^{\Delta} = 6Ei_{12}\psi_{12} = 6E \frac{3I}{6} \left(-\frac{\Delta v}{6} \right) = -210$$

$$R_{1\Delta} = -26,20, \quad R_{2\Delta} = 210.$$

Sistemul de ecuații de condiție este:

$$\begin{cases} 29,5Z_1 + 6Z_2 - 26,25 = 0 \\ 6Z_1 + 19,16Z_2 + 210 = 0 \end{cases}$$

care în urma rezolvării conduce la:

$$Z_1 = 3,33 \quad \text{și} \quad Z_2 = -12.$$

Cu aceste valori se trasează diagrama de moment încovoiator M suprapunând efectele, $M = M'_{\Delta} + m_1Z_1 + m_2Z_2$ (fig. 12.10).

Problema 12.11. Să se traseze diagrama de moment încovoietor la structura din figura 12.11, supusă acțiunii variației de temperatură t_m , indicată pentru fiecare bară în parte. Se dau: $\alpha = 10^{-5}$, $EI = 15\,000 \text{ kNm}^2$.

Cadrul este cu noduri deplasabile și are un grad de libertate. Rigiditățile practice sînt înscrise pe sistemul de bază.

Pentru trasarea diagramei M , este necesară determinarea deplasărilor nodurilor. Pentru aceasta se construiește diagrama Williot. Alungirile barelor, determinate cu relația $\Delta l_{ij} = \alpha t_m l_{ij}$, sînt:

$$\Delta l_{12} = 10^{-5} \cdot 30 \cdot 5 = 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta l_{23} = \Delta l_{12} = 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta l_{34} = 10^{-5} \cdot 15 \cdot 5 = 0,75 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta l_{35} = 10^{-5} \cdot 30 \cdot 2,5 = 0,75 \cdot 10^{-3}$$

Notînd cu Δ_j deplasarea relativă a capetelor reazemelor, din diagrama Williot rezultă:

$$\Delta_{12} = \Delta l_{23} + \Delta l_{35} = 2,25 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_{23} = \Delta l_{12} - \Delta l_{34} = 0,75 \cdot 10^{-3}$$

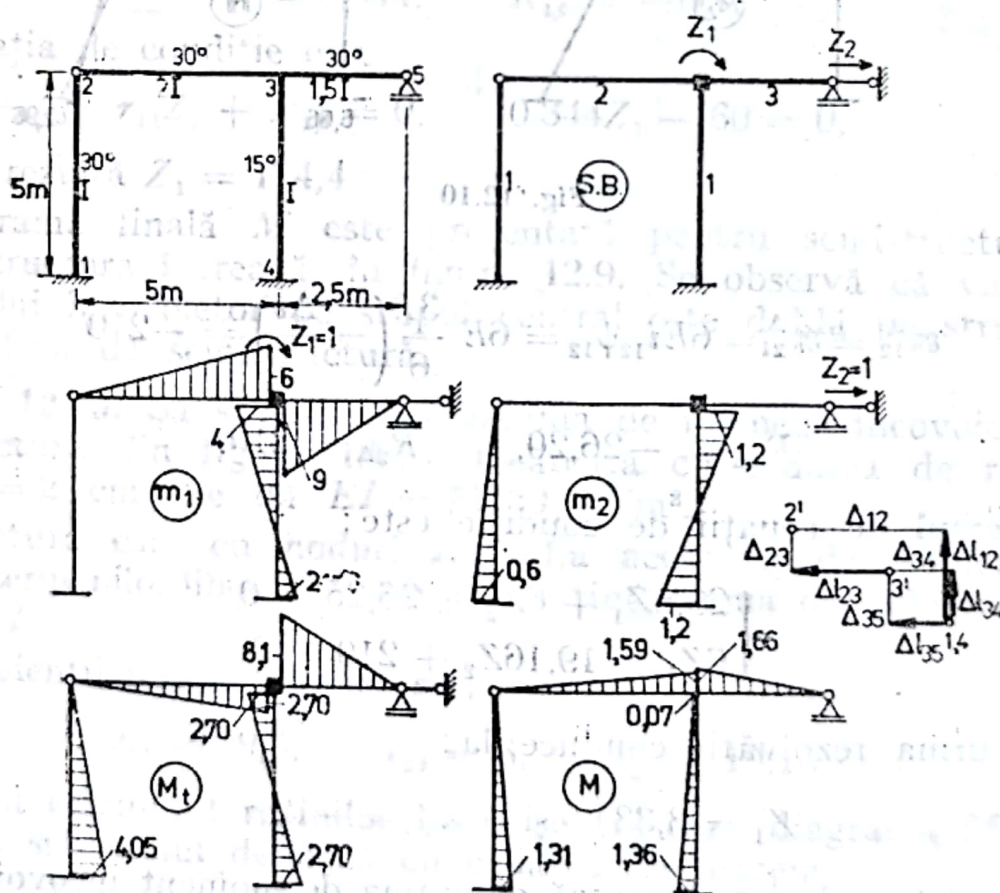


Fig. 12.11

$$\Delta_{34} = \Delta l_{35} = 0,75 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta_{35} = \Delta l_{34} = 0,75 \cdot 10^{-3}$$

Rotirile barelor, $\psi_{ij} = \frac{\Delta l_{ij}}{l_{ij}}$, sînt:

$$\psi_{12} = -\frac{2,75}{5 \cdot 10^3}, \psi_{23} = \frac{0,75}{5 \cdot 10^3}, \psi_{34} = -\frac{0,75}{5 \cdot 10^3}, \psi_{35} = \frac{0,75}{2,5 \cdot 10^3}$$

iar momentele încovoietoare de încastrare perfectă M_{ij}^t sau M_{ik}^t au valorile:

$$M_{12}^t = 3i_{12}\psi_{12} = 3 \cdot 3000 \left(-\frac{2,75}{5 \cdot 10^3} \right) = -4,05 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^t = 3i_{32}\psi_{32} = 3 \cdot 2 \cdot 3000 \cdot \frac{0,75}{5 \cdot 10^3} = 2,70 \text{ kNm}$$

$$M_{34}^t = M_{43}^t = 6i_{34}\psi_{34} = 6 \cdot 3000 \left(-\frac{0,75}{5 \cdot 10^3} \right) = -2,70 \text{ kNm}$$

$$M_{35}^t = 3i_{35}\psi_{35} = 3 \cdot 3 \cdot 3000 \cdot \frac{0,75}{2,5 \cdot 10^3} = 8,1 \text{ kNm}$$

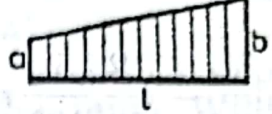
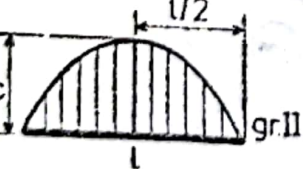
Cu aceste valori s-a trasat diagrama M_t , din care s-au calculat termenii liberi: $R_{1t} = -8,1$ și $R_{2t} = -1,89$. Coeficienții necunoscutelor fiind: $r_{11} = 19$, $r_{12} = r_{21} = -1,2$ și $r_{22} = 0,6$, sistemul de ecuații se scrie

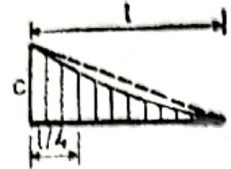
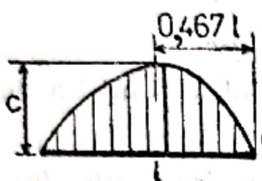
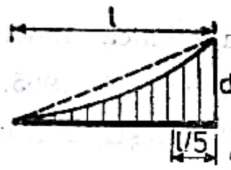
$$\begin{cases} 19Z_1 - 1,2Z_2 - 8,1 = 0 \\ -1,2Z_1 + 0,6Z_2 - 1,89 = 0 \end{cases}$$

Necunoscutele au valorile: $Z_1 = 0,715$ și $Z_2 = 4,57$, cu care s-a trasat diagrama finală, $M = M_t + m_1Z_1 + m_2Z_2$ (fig. 12.11).

ANEXA 1

Valorile $\int m M dx$

$\begin{array}{c} m \\ \diagdown \\ M \end{array}$			
	alc	$\frac{1}{2} alc$	$\frac{1}{2} cl(a + b)$
	$\frac{1}{2} alc$	$\frac{1}{3} alc$	$\frac{1}{6} lc(b + 2a)$
	$\frac{1}{2} ald$	$\frac{1}{6} ald$	$\frac{1}{6} ld(2b + a)$
	$\frac{1}{2} al(2c + d)$	$\frac{1}{6} al(2c + d)$	$\frac{1}{6} l[c(2a + b) + d(2b + a)]$
	$\frac{1}{2} al(c + d)$	$\frac{1}{6} al(2d + c)$	$\frac{1}{6} l[c(2b + a) + d(2a + b)]$
	$\frac{2}{3} cla$	$\frac{1}{3} cla$	$\frac{1}{3} cl(a + b)$

 gr.II	$\frac{1}{3} cla$	$\frac{1}{4} cla$	$\frac{1}{12} cl(3a + b)$
 gr.II	$\frac{1}{3} dla$	$\frac{1}{12} dla$	$\frac{1}{12} dl(a + 3b)$
 gr.III	$\frac{1}{3} cla$	$\frac{7}{45} cla$	$\frac{1}{45} cl(7a + 8b)$
 gr.III	$\frac{1}{4} cla$	$\frac{1}{5} cla$	$\frac{1}{20} cl(4a + b)$
 gr.III	$\frac{1}{4} dla$	$\frac{1}{20} dla$	$\frac{1}{20} dl(a + 4b)$

* Încărcarea este distribuită liniar, cu valoarea zero în capătul din stînga.

BIBLIOGRAFIE

1. Agent, R., *Sisteme reticulare nedeterminate*. București, Editura tehnică, 1970.
2. Avram, C., *Grinzi continue*. București, Editura Academiei RSR, 1981.
3. Bayer, K., *Die Statik im Stahlbetonbau*. Berlin, Springer Verlag, 1956.
4. Cătărig, Al., Petrina, M., Coheci, T., *Mecanica construcțiilor* Vol. 3. Cluj-Napoca, Institutul politehnic, 1978.
5. Cătărig, Al., Olariu, I., Petrina, M., *Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor*. Vol. 1. Cluj-Napoca, Institutul politehnic, 1981.
6. Darkov, A., *Stroitel'naja mehanika*. Moskva, Vyssaja skola, 1976.
7. Darkov, A., Kuznetsov, V., *Cours de Mécanique des constructions*. Moscou, Editions MIR, 1968.
8. Ghali, A., Neville, A. M., *Structural Analysis*, London, Chapman and Hall, 1977.
9. Gheorghiu, Al., *Statica construcțiilor*. Vol. 1. București, Editura tehnică, 1960.
10. Gheorghiu, Al., *Statica construcțiilor*. Vol. 2. București, Editura tehnică, 1965.
11. Gheorghiu, Al., *Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor*. București, Editura didactică și pedagogică, 1974.
12. Hirschfeld, K., *Baustatik*. Berlin, Springer Verlag, 1965.
13. Ilie, V., *Rezistența materialelor*. Vol. 2. Cluj-Napoca, Institutul politehnic, 1977.
14. Ivan, M., Vulpe, A., Bănuț, V., *Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor*. București, Editura didactică și pedagogică, 1982.
15. Klein, G., *Rukovodstvo k praktičeskim zanjatijam po kursu stroitel'noj mehaniki*. Moskva, Vyssaja skola, 1980.
16. Massonnet, Ch., Deprez, G., Maqui, R., Muller, R., Fonder, G., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*. București, Editura tehnică, 1974.
17. Mazilu, P., *Statica construcțiilor*. Vol. 1. București, ESAC, 1955.
18. Mazilu, P., *Statica construcțiilor*. Vol. 2. București, Editura tehnică, 1959.
19. Mazilu, P., Posea, N., Iordăchescu, E., *Probleme de rezistența materialelor*. Vol 2. București, Editura tehnică, 1975.
20. Muhin, I., *Statika sooruzenij v primerah*. Moskva, Vyssaja skola, 1972.

21. Munteanu, I., *Calculul static al structurilor*. Timișoara, Editura Facla, 1976.
22. Munteanu, I., *Structuri pentru construcții. Teorie și calcul*. Vol 1. București, Editura Academiei RSR, 1983.
23. Ping-Chun Vang, *Metode numerice și matriceale în Mecanica construcțiilor*. București, Editura tehnică, 1970.
24. Răutu, S., Bănuț, V., *Statica construcțiilor. Culegere de probleme*. București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
25. Răutu, S., Bănuț, V., *Statica construcțiilor*. București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
26. Rubinstein, M., *Structural sistem — statics, dynamics and stability*. New Jersey, Prentice Hall, 1970.

Redactor: MONICA CREMENE
Tehnoredactor: CONSTANTIN RUSU

Apărut: 1984. Bun de tipar: 27.07.1984. Comanda nr.: 2496.
Coli de tipar: 20,25. Hîrtie: velină 70 g/mp. Format: 61×86/16.

Tiparul executat sub comanda nr. 152
la ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ CLUJ
Municipiul Cluj-Napoca
B-dul Lenin nr. 146.
Republica Socialistă România

